UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Departamento de Matemática Puras y Aplicadas

Guías de estudio para el curso audiovisual
GEOMETRÍA
MA1511

Enrique Planchart (USB)

Universidad Simón Bolívar
Apartado de Correos 89000
Baruta, Estado Miranda

MAT117 - GEOMETRÍA

Redacción: Enrique Planchart.

Primera Edición: Septiembre 1978

Segunda Edición: Septiembre 2004

Tercera Edición: Septiembre 2005

Cuarta Edición: Septiembre 2006

Totalmente editada e impresa en la Universidad Simón Bolívar

Queda hecho el depósito legal No. 2126

RECONOCIMIENTO ***(Septiembre 1978)***

Este curso audiovisual de Geometría MAT117, es el fruto del trabajo de profesores y estudiantes del Departamento de Matemáticas y Ciencias de la Computación y personal de la Unidad de Medios Audiovisuales, que trabajaron en equipo bajo mi dirección durante los años académicos 1976-1977 y 1977-1978.

Colaboraron en el dictado del curso y en la producción del mismo los profesores Vicente Tinoco y Roberto Lavieri, éste último era en esa época estudiante de Post-Grado. Por tiempos más cortos también trabajaron los estudiantes de Post-Grado, Eduardo Gómez y Gerardo Mendoza. Numerosos preparadores prestaron valiosísima colaboración en el dictado del curso, haciendo muchas observaciones que contribuyeron a mejorar las versiones previas; grabando todos los programas audiovisuales y haciendo los dibujos de este libro. Al esfuerzo coordinado de todo este equipo se debe gran parte de los aciertos y del éxito del curso. No ocurre así con las fallas y errores que pueda tener, los cuales son de mi entera responsabilidad.

La realización de los programas audiovisuales estuvo a cargo del personal de la Unidad de Medios Audiovisuales bajo la experta dirección del señor Martín Hruskovec y del profesor Manuel Benavides.

Quiero expresar mi agradecimiento también a la señora Fanny Acuña de Castro y a la señorita Alma Rueda quienes mecanografiaron e hicieron todos los dibujos correspondientes a las dos primeras versiones de estas Guías. Finalmente, al personal del Taller de Estudios Libres que tuvo a su cargo la edición e impresión de este libro.

Enrique Planchart

PRESENTACIÓN DEL CURSO MA1511

EDICIÓN Septiembre 2005

FINALIDAD DEL CURSO

El curso audiovisual de Geometría, MA1511, se dictó por primera vez en el trimestre septiembre-diciembre de 1975 bajo el código MAT117 y ahora se dictará con algunas variantes y cambios en la tecnología. Desde el principio se presentó como una necesidad para mejorar la formación en Geometría que trae de bachillerato el estudiante medio. Esta necesidad fue planteada principalmente por los Coordinadores de las distintas ramas de Ingeniería que se enseñan en la Universidad, pues se detecta una falta enorme de intuición geométrica en la mayoría de los estudiantes y aún en estudiantes muy avanzados.

El principal objetivo de este curso es subsanar la falla dejada por la escuela secundaria en la enseñanza de la Geometría, no debe extrañar entonces que buena parte del contenido del curso figure, o figuraba hasta hace poco, en los programas oficiales de educación media y diversificada.

Por otro lado se quiere agudizar la intuición geométrica del estudiante. Como frecuentemente el exceso de formalismo destruye la intuición, si se administra muy temprano sin la madurez matemática necesaria para digerirlo, hemos tratado de reducir el formalismo al mínimo y hemos hecho la exposición de la materia lo más intuitiva posible.

Finalmente se quiere motivar e interesar al alumno en el estudio de la Geometría, más allá del nivel elemental de este curso. Por esta razón se tratan algunos temas en el texto y en los ejercicios cuyo desarrollo completo no es posible a este nivel, pero que intuitivamente son sencillos de entender.

METODOLOGÍA

La metodología del curso MA1511 es distinta a la usual en secundaria o en la Universidad. El curso está presentado en forma de 20 capítulos de estudio y 20 programas audiovisuales, y además de esto hay sesiones de consulta que están a cargo de preparadores. Los preparadores son estudiantes más adelantados que han sido entrenados previamente tanto en la materia como en metodología de la enseñanza.

Es muy importante hacer notar que la *responsabilidad del aprendizaje* en este curso, como en cualquier otro, es fundamentalmente del *estudiante.* Lo único que ofrece la Universidad son recursos que pone a disposición del estudiante para que él mismo logre su aprendizaje. En este caso los recursos son de tres tipos distintos:

1. GUIAS ESCRITAS: Constituyen la médula del curso ya que contienen todo el material: textos, ejercicios, problemas, bibliografía y notas. Las Guías han sido escritas especialmente para el curso y son autocontenidas, no es necesario recurrir a la bibliografía para entender y asimilar las Guías. El curso consta de 20 Capítulos o Lecciones.
2. PROGRAMAS AUDIOVISUALES: Cada Guía está acompañada de un programa audiovisual, en el cual se desarrolla el tema de la Guía en forma rápida e intuitiva. El programa audiovisual sirve para motivar el estudio de la Guía y para dar ideas muy rápidas pero muy efectivas. No se debe esperar del programa audiovisual una explicación completa del material, ésta corresponde a la Guía. El programa sirve para obtener muy rápidamente, en aproximadamente 30 minutos, una visión global del tema de cada Guía y facilita enormemente su estudio.
3. PRÁCTICAS Y CONSULTAS: Se han planificado las clases prácticas, de resolución de ejercicios y consulta de problemas. Cada clase práctica corresponde a uno de las 20 Lecciones, y tendrán lugar dos veces por semana. El preparador encargado de cada sección conducirá la clase práctica únicamente para orientar al estudiante y para estimularlo en su trabajo, no para resolver los problemas de la Guía. En consecuencia, el estudiante no debe esperar ni exigir que el preparador resuelva los problemas, esto debe ser hecho por el estudiante mismo. Tampoco será posible hacer todos los problemas de la lección en una clase; muchos quedarán como tarea para ser resueltos en casa.
4. FORO EN LA RED: se dispondrá de una dirección en la Internet, accesible para todos los estudiantes, en la cual se apoyará el aprendizaje de los temas del curso. Se ha planificado un foro electrónico, para formular preguntas y respuestas en línea, además de una dirección en la red con la información general del curso, las autoevaluaciones y avisos urgentes para los estudiantes.

FUNCIONAMIENTO DEL CURSO

Los estudiantes deben atender a los siguientes recomendaciones para seguir el curso:

1. En la primera semana, comprar la Guía (o guías) de Geometría y un disco compacto con los programas audiovisuales.

2. Atender los programas audiovisuales indicados para cada semana. Para esto los estudiantes disponen de los siguientes opciones:
   a) Con un computador provisto de equipo multimedia, en su hogar, residencia, cibercafé etc. . . en el momento que el estudiante disponga.
   b) En las salas computarizadas del campus universitario, reservadas para los estudiantes del cursos de geometría. Las aulas y horarios disponibles se anunciarán oportunamente.
   c) En las salas multimedia donde con un video-beam se proyectarán los programas para grupos de unos 30 estudiantes a la vez. Las salas y horarios se anunciarán oportunamente. Como cada programa audiovisual tiene una duración de 30 minutos aproximadamente, quedará un tiempo libre al final de cada proyección para hacer alguna consulta al preparador, relativas al programa o la lección correspondiente.

   Los programas audiovisuales quedan, en cualquier caso, constantemente a disposición de los alumnos y pueden ser vistos individualmente o en grupos en las salas multimedia provistas por la DSM (Dirección de Servicios Multimedia).
3. Estudiar las lecciones en la Guía, despues de haber atendido la lección audiovisual. Después de haber visto el programa audiovisual, ese mismo día, se debe comenzar el estudio de la Guía.
4. Plantear soluciones a todos los ejercicios o problemas propuestos para cada lección.
5. Consultar en el foro electrónico, o en las clases prácticas, las soluciones a los problemas encontrados con la lección correspondiente.
6. Resolver los cuatro exámenes de autoevaluación propuestos con tres días de antelación a los cuatro exámenes del curso.
7. Cada sección de MA1511, tiene asignadas dos horas de clase práctica semanales en un aula (con pizarra). Asistir a esas clases prácticas (consultas) dirigidas por los preparadores y asesoradas por profesores. También es conveniente que se haga un repaso de la Guía y todos los problemas posibles antes de la clase práctica correspondiente. Esto permitirá a los estudiantes aprovechar al máximo la clase taller y obtener ayuda del preparador en los puntos que realmente les cuestan más trabajo y que no hayan podido resolver solos. Ese tiempo será utilizado por el preparador para aclarar dudas y preguntas.

   En algún caso se podrá utilizar parte del tiempo para la resolución de problemas que aún queden pendientes de Guías anteriores, pero esto debe ser hecho con el mismo método general de las clases prácticas.
8. En las semanas 3, 6, 9 y 12, se han fijado los cuatro exámenes parciales. Estos exámenes tienen una hora de duración, adicional a las clases prácticas de esas semanas.

EDICIÓN Septiembre 2005

En esta edición se han agregado las nociones de producto escalar y producto vectorial y su aplicación en la determinación de ecuaciones de planos y rectas en el espacio. Se agregaron respuestas a muchos ejercicios y se hicieron correcciones tipográficas.

EDICIÓN Septiembre 2006

En esta edición, sólo se hizo el cambio al formato retrato, manteniéndose el contenido de la edición anterior.

Índice general

CAPíTULO 1

INTRODUCCIÓN

El objeto de este curso es presentar y desarrollar algunos temas de Geometría desde un punto de vista puramente intuitivo, no desde el punto de vista formal. Esto no quiere decir que vamos a dejar por completo de hacer “demostraciones", sólo que no vamos a llevarlas al extremo. Para aquellos estudiantes más interesados en el aspecto formal, daremos a lo largo de estas guías la bibliografía necesaria.

Al comenzar el estudio desde este punto de vista intuitivo, lo primero que se nos ocurre preguntarnos es ¿qué es lo que queremos estudiar? ¿qué es la Geometría? Ingenuamente buscamos un diccionario y leemos:

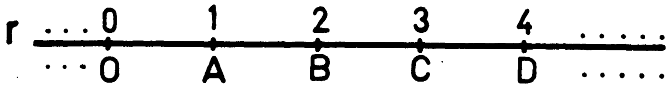
> **GEOMETRÍA** f. *Parte de las Matemáticas que trata de las propiedades, relaciones y medida de la extensión.*

Bueno, la verdad es que aún no nos queda muy claro. ¿Qué es la extensión?, ¿una recta?, ¿un plano, por ejemplo? Supongamos que se trata de una recta. Entonces se trataría de estudiar propiedades, relaciones y medidas de rectas o trozos de rectas, segmentos. Comencemos por esto último: medir trozos de rectas.

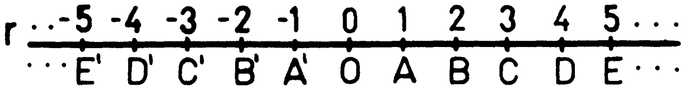
Medir un segmento con otro significa compararlos, ver cuántas veces cabe uno en otro. Es decir, una vez que tomamos un $\overline{AB}$ como unidad, queremos saber cuántas veces cabe $\overline{AB}$ en $\overline{CD}$. Queremos asignar un número a $\overline{CD}$ una vez fijada la unidad $\overline{AB}$. Esto nos lleva a tener que identificar puntos de una recta con los números

LA RECTA REAL

Los primeros números que aprendemos son los *naturales:* $1, 2, 3, 4, \ldots$, porque los utilizamos para contar. Hay infinitos números naturales y pueden representarse así: en una recta r marcamos un punto O, a continuación marcamos un punto A a la derecha de O, luego a la derecha de A marcamos los puntos $B, C, \ldots$ igualmente espaciados como en la figura siguiente:

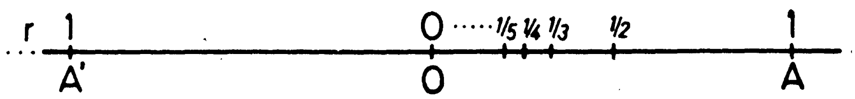


De igual manera podemos representar los *números enteros* $\ldots, \cdots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$;



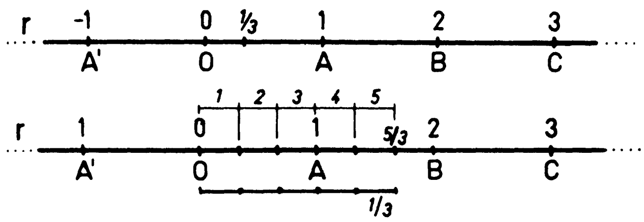
$$1, 2, 3, 4, \ldots \text{ son los enteros positivos,}$$
$$-1, -2, -3, -4, \ldots \text{ son los enteros negativos.}$$

Sobre la recta en que representamos los *números enteros,* podemos también representar los números racionales. Esto lo podemos lograr dividiendo primero el segmento $\overline{OA}$ en mitades, terceras partes, cuartas partes, etc., para representar los números $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc... respectivamente.

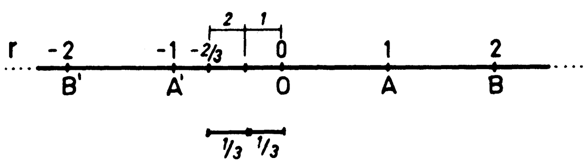


Para obtener la representación del racional $\frac{m}{n}$ (m y n son enteros, y $n \neq 0$, como se sabe), basta ahora llevar la longitud entre 0 y $\frac{1}{n}$, m veces a la derecha de 0, (si m es negativo se lleva m veces a la izquierda de 0).

Por ejemplo, el punto de r que hacemos corresponder con el racional $\dfrac{5}{3}$ se obtiene así:



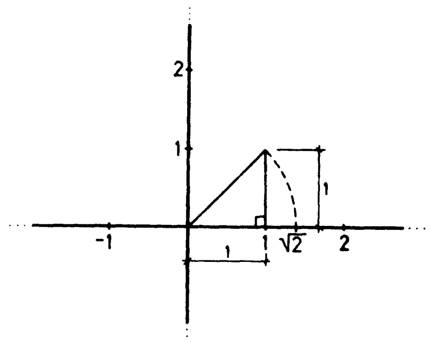
y, $-\dfrac{2}{3}$, así:



Fíjese que este proceso depende de la representación del racional $\frac{1}{3}$. Más adelante, veremos cómo construir segmentos de longitud $\frac{1}{n}$ usando semejanza de triángulos.

Hasta el momento, tenemos representados en la recta todos los números racionales, pero hay puntos de r que no corresponden a ningún racional (este hecho ya era conocido por los griegos).

Veamos por qué: Usando regla y compás podemos fabricar un segmento cuya longitud no es racional: la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden ambos 1:



Por el teorema de Pitágoras: longitud de la hipotenusa igual a $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Para asegurarse que el punto de r que hemos marcado como $\sqrt{2}$ no es ninguno de los puntos que corresponden a números racionales, basta observar lo siguiente: si $\sqrt{2}$ fuese racional, tendríamos que $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, donde m y n son números enteros sin factores comunes (en caso de haber tales factores podríamos cancelarlos), luego $2n^2=m^2$, de aquí vemos que m^2 es un número par y entonces m es par (si m fuese impar m^2 también sería impar, ¿por qué?), así que $m=2p$ donde p es un entero, luego:

$$2n^2=m^2=4p^2; n^2=2p^2,$$

así n^2 es par y por el mismo argumento de antes, tendremos que n es par. Entonces hemos concluido que si $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, donde m y n no tienen factores comunes, entonces m y n tienen el factor 2 en común, lo cual es absurdo. Este absurdo proviene de la única suposición que hemos hecho, que $\sqrt{2}$ es racional.

Entonces $\sqrt{2}$ no es cociente de enteros, y por tanto no es racional.

A los números que no son racionales los llamamos irracionales, y a los racionales junto con los irracionales, los llamamos números reales. Después de representar los números reales sobre nuestra recta r hemos hecho corresponder a cada número un punto sobre la recta. Esta recta se llama la recta real. El número real asociado con un punto de la recta se llama la coordenada del punto.

Así, la recta real está formada por un conjunto infinito de puntos con las características siguientes:

1. Cada punto de la recta se encuentra asociado con un solo número real.
2. Cada número real puede asociarse exactamente con un punto sobre la recta.

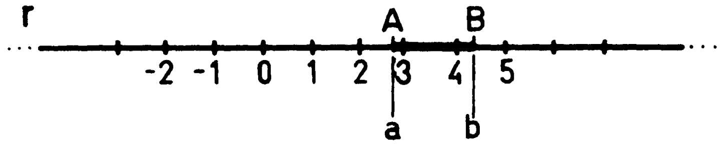
En otras palabras, existe una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de una recta. Pronto veremos esta correspondencia con más detalle, por ahora volvamos a nuestro problema inicial.

MEDIDA DE UN SEGMENTO DE RECTA

Si $\overline{AB}$ es un segmento en la recta real y si a es la coordenada de A y b es la coordenada de B, entonces la longitud del segmento AB (que denotamos por $\overline{AB}$) es $a-b$ si a es mayor que b, y $b-a$ si b es mayor que a:

$$\overline{AB} = \begin{cases} a-b & \text{si} \quad a > b \\ b-a & \text{si} \quad a < b \,, \end{cases}$$

es decir, $\overline{AB}$ es el valor absoluto de $a-b$; $\overline{AB} = |a-b|$.



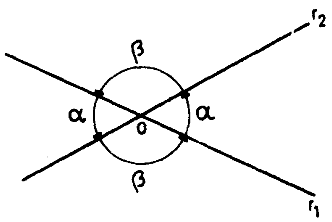
Esto resuelve entonces el problema de medir un segmento con otro considerado como unidad de medida. Para medir un segmento $\overline{AB}$, lo llevamos sobre una recta real, con la unidad de medida que deseemos

***

Cuando hablamos de extensión, pensamos que podía tratarse también de un plano o un pedazo de un plano: un ángulo, por ejemplo.

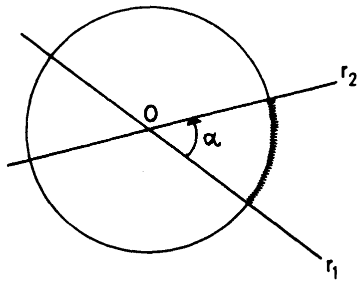
ÁNGULOS Y SU MEDIDA

Consideremos ahora un plano y dos rectas en él r_1 y r_2. Si estas rectas se cortan en un punto O, se forman dos ángulos, α y β:

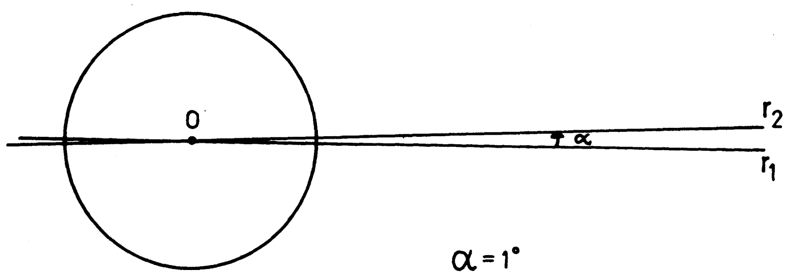


Si convenimos en nombrar los ángulos en sentido anti-horario (contrario a las agujas del reloj), tendremos que α =(ángulo entre r_1 y r_2) y β =(ángulo entre r_2 y r_1). Notamos que en general $\alpha \neq \beta$.

Para medir el ángulo α, por ejemplo, podemos usar un método originario de Babilonia y muy utilizado actualmente fuera de las matemáticas, que consiste en trazar una circunferencia con centro en O y radio arbitrario. Luego se divide a la circunferencia en 360 arcos de igual longitud, comenzando en el punto donde la circunferencia corta la recta r_1, como se muestra en la figura:



Cada uno de estos arcos representa un ángulo de un grado, en el siguiente sentido: si r_2 cortara a la circunferencia por el extremo del primer arco, diríamos que el ángulo α es de un grado (1^0).

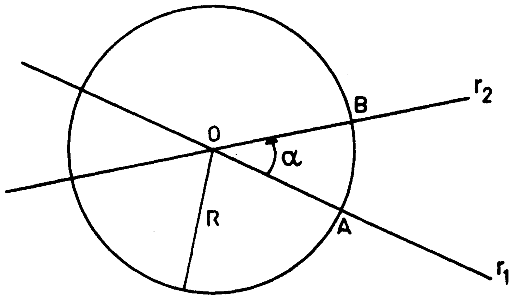


Si las subdivisiones de la circunferencia no son suficientes para dar una medida exacta de α, se puede subdividir cada arco en 60 arcos más, todos iguales. Al ángulo definido por uno de estos nuevos arcos se le llama un minuto ($1'$). Finalmente, cada uno de estos arcos puede dividirse en 60 arcos más, que forman ángulos de un segundo ($1''$). Para medir cuánto vale α en nuestro ejemplo se cuenta cuántos grados, minutos, segundos y fracciones de segundo hay en el arco comprendido entre r_1 y r_2.

Normalmente, para simplificar el proceso se usa un instrumento llamado transportador, que si es muy exacto recibe más bien el nombre de goniómetro (*gonios* es raíz griega que significa ángulo).

Hay muchas razones por las cuales al trabajar en matemáticas se prefiere usar una medida del ángulo llamada *radián*. Una, es que no se basa en un número arbitrario de subdivisiones de la circunferencia, como la medida de grados que discutimos arriba (existe una medida de ángulos dada en grados centesimales que se obtiene al subdividir la circunferencia en 400 partes iguales, cien para cada ángulo recto).

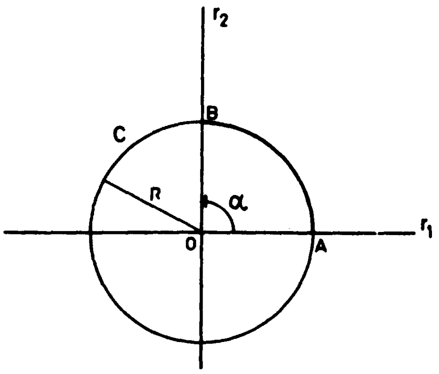
La medida en radianes del ángulo α entre las rectas r_1 y r_2 se obtiene. así: Se traza una circunferencia con centro O



y radio arbitrario. Se mide la longitud del arco $\overline{AB}$ y se divide entre el radio R de la circunferencia:

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{R}\text{radianes.}$$

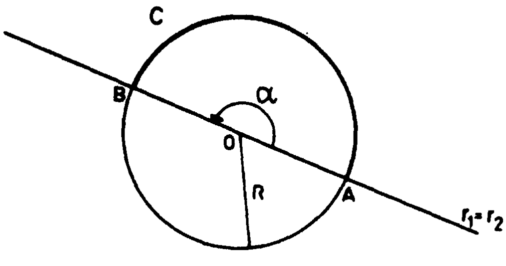
Por ejemplo, si r_1 y r_2 se cortan en ángulo recto, el arco AB mide la cuarta parte del perímetro de la circunferencia, $2\pi R$, y por tanto el ángulo α es $\frac{\pi}{2}$. Observe la figura siguiente,



$$\begin{aligned} \overset{\frown}{AB} &= \tfrac{2\pi R}{4} \\ \alpha &= \tfrac{\overset{\frown}{AB}}{R} = \tfrac{2\pi R}{4R} = \tfrac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Fíjese que el cociente $\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{R}$ tiene un valor que no depende del radio R de la circunferencia que usamos: $\frac{\pi}{2}$ no depende de R.

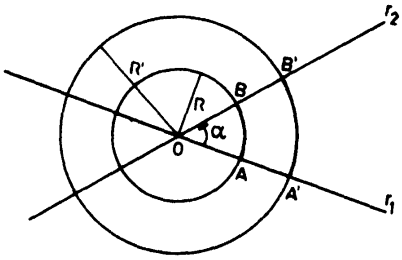
Veamos otro ejemplo: la medida del ángulo llano ($\alpha = 180^o$). En este caso, las rectas coinciden, y el ángulo α es el indicado en la figura. Al trazar una circunferencia C con centro en O, obtenemos que AB es la mitad del perímetro de C,



$$\begin{aligned} \overset{\frown}{AB} &= \tfrac{2\pi R}{2} = \pi R \\ \alpha &= \tfrac{\overset{\frown}{AB}}{R} = \tfrac{\pi R}{R} = \pi \end{aligned}$$

y por tanto $\alpha = \pi$ radianes. De nuevo, el cociente $\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{R}$ es un número que no depende de R.

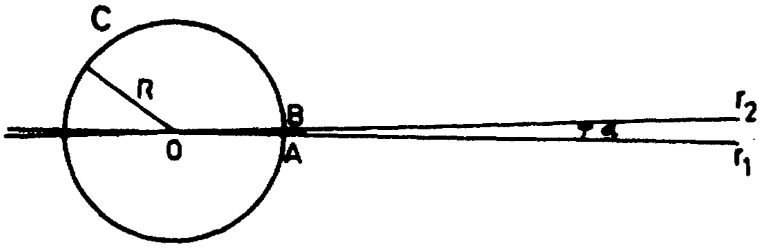
En general, dado el ángulo α y dos circunferencias de radios R y R', los números $\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{R}$ y $\dfrac{\overset{\frown}{A'B'}}{R'}$ son iguales, y esto hace que la medida de un ángulo en radianes sea bien definida, de manera que es utilizable.



$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{R} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{R'}$$

Si tiene dudas sobre este hecho, que $\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{R} = \dfrac{\overset{\frown}{A'B'}}{R'}$, no debe preocuparse. Esto quedará bien claro en otra guía, más adelante, al estudiar la semejanza.

La equivalencia entre radianes y grados se puede obtener así: trazamos un ángulo α que mida un grado, y una circunferencia C con radio R y centro en el vértice del ángulo. Por la definición de grado, sabemos que el arco $\overset{\frown}{AB}$ es la 360-ava parte del perímetro de C. El perímetro de C es $2\pi R$, y por tanto



$$\begin{aligned} \overset{\frown}{AB} &= \tfrac{2\pi R}{360} \\ \alpha &= \tfrac{\overset{\frown}{AB}}{R} = \tfrac{\frac{2\pi R}{360}}{R} \\ &= \tfrac{\pi}{180} \text{ radianes.} \end{aligned}$$

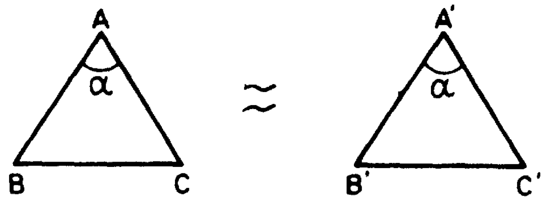
Un grado equivale a $\frac{\pi}{180}$ radianes.

* * *

Volviendo a la definición del diccionario, recordamos que se refería no solamente a la "medida de la extensión" sino también a "las propiedades y relaciones de la extensión".

Tratemos de ilustrar esto con algunos ejemplos.

Pensamos de nuevo en "la extensión" como un plano o un pedazo de un plano, consideremos triángulos, por ejemplo: Estas dos "extensiones" parecen iguales



No diremos iguales, diremos *congruentes.* Esto significa que podemos llevar uno sobre el otro. La congruencia es una relación entre triángulos (y entre figuras geométricas, en general).

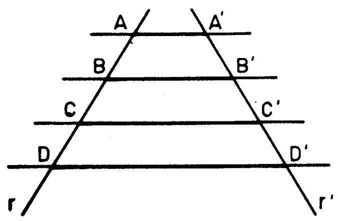
Recordemos los casos de congruencia de triángulos:

El ΔABC y el $\Delta A'B'C'$ son congruentes en cualquiera de los casos siguientes:

1. Si tienen un ángulo igual y los pares de lados adyacentes a este ángulo también son iguales.
2. Si tienen un lado igual y los pares de ángulos adyacentes a este lado también son iguales.
3. Si tienen los tres lados iguales.

Para ilustrar otro ejemplo, recordemos un teorema atribuido a Thales de Mileto (624-546 a.C.).

El teorema dice que si cortamos dos rectas cualesquiera por rectas paralelas entre si, obtenemos segmentos proporcionales (de medidas o longitudes proporcionales):

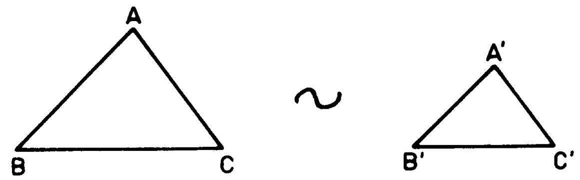


$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} &= \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \\ &= \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} \\ &= \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \text{ etc...} \end{aligned}$$

Seguramente usted está familiarizado con este teorema, sin embargo es poco probable que haya visto una demostración satisfactoria en bachillerato. Esto obedece al hecho de que para la demostración completa son necesarios algunos conceptos que se estudian hacia al final del curso de Matemáticas de primer año.

Otro ejemplo de lo que puede significar el estudio de "las propiedades y relaciones de la extensión", seria el estudio de la semejanza de triángulos.

Decimos que dos triángulos son semejantes cuando es posible establecer una correspondencia entre sus ángulos y entre sus lados de manera que ángulos correspondientes sean iguales y lados correspondientes sean proporcionales.



$$\begin{aligned} \Delta ABC &\sim \Delta A'B'C' \text{ si} \\ \angle A &= \angle A' \\ \angle B &= \angle B' \\ \angle C &= \angle C' \quad \text{y} \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} &= \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \end{aligned}$$

Para establecer la semejanza de dos triángulos no es necesario verificar todas estas seis condiciones. Basta verificar las siguientes:

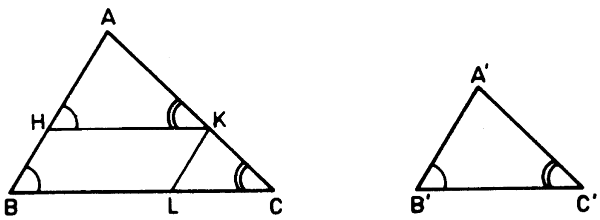
CASOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

En cualquiera de los tres casos siguientes, dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes.

1. Si tienen dos ángulos iguales.
2. Si tienen un ángulo igual y los lados adyacentes proporcionales.
3. Si tienen los tres pares de lados proporcionales.

Demostración. La demostración se basa en el Teorema de Thales. Vamos a probar el caso (3) y dejamos la demostración de (1) y (2) como ejercicio.

Supongamos que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$, queremos probar que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes.



Tracemos $\overline{AH} = \overline{A'B'}$ y una paralela por H a BC, corta en K.

Entonces $\Delta AHK \sim \Delta ABC$, los ángulos marcados con el mismo signo son iguales y

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AK}}$$

Finalmente trazando una paralela por K a BA se obtiene

$$HK = BL \text{ y } \frac{\overline{AC}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BL}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{HK}} \text{ o sea } \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{HK}}.$$

Por otra parte los triángulos AHK y $A'B'C'$ son congruentes porque

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AK}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \text{ luego } \overline{AK} = \overline{A'C'}.$$

Del mismo modo se ve que $\overline{HK} = \overline{B'C'}$. De la congruencia de los triángulos AHK y $A'B'C'$ resulta que $\angle A = \angle A'$; $\angle B = \angle B'$ y $\angle C = \angle C'$.

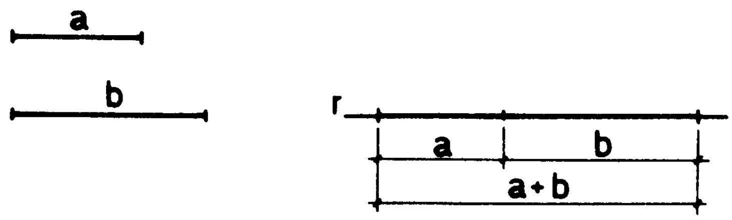
* * *

Con estos ejemplos ya tenemos una idea de lo que quiere decir la definición de Geometría que da el diccionario, suficiente como para comenzar nuestro estudio. Más adelante tendremos ocasión de dar una definición más precisa.

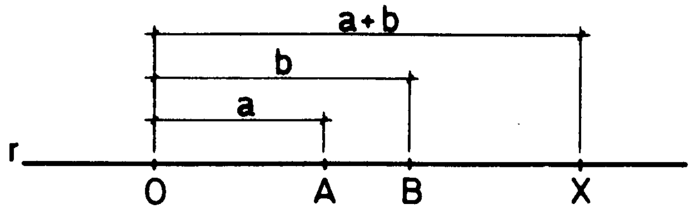
Para terminar volvamos a la recta real, a la correspondencia que habíamos establecido entre números reales y puntos de la recta. Esta correspondencia es esencial en Geometría y es uno de los grandes inventos de la Humanidad, vale la pena estudiarla con más detalle.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA SUMA, RESTA, MULTIPLICACIÓN, DIVISIÓN Y ORDEN DE LOS NÚMEROS REALES

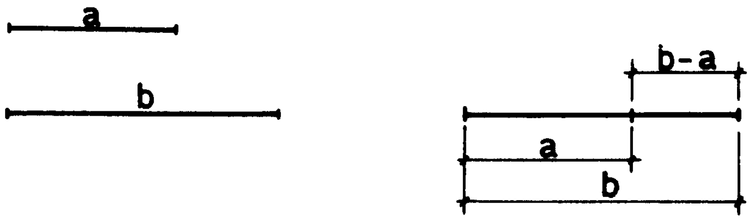
La suma de dos números reales positivos a y b, se puede interpretar de la siguiente manera: tenemos dos segmentos de longitudes a y b



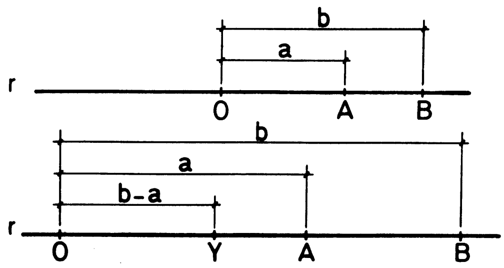
Llevando uno a continuación de otro obtenemos un segmento de longitud $a + b$ ya que en la recta real, si $\overline{OA}$ tiene longitud a y $\overline{OB}$ tiene longitud b el segmento OX obtenido llevando OA al extremo de OB tiene longitud $a + b$. El punto X corresponde al número real $a + b$.



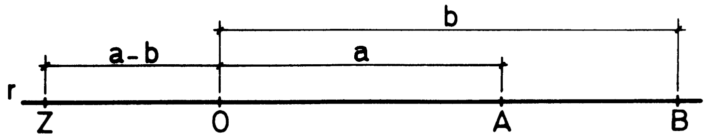
Para obtener un segmento de longitud $b - a$, llevamos el segmento de longitud a a partir de un extremo del de longitud b. El segmento sobrante tiene longitud $b - a$



En la recta real, si llevamos el segmento OA a partir del punto B obtenemos el segmento OY que tiene longitud $b - a$.



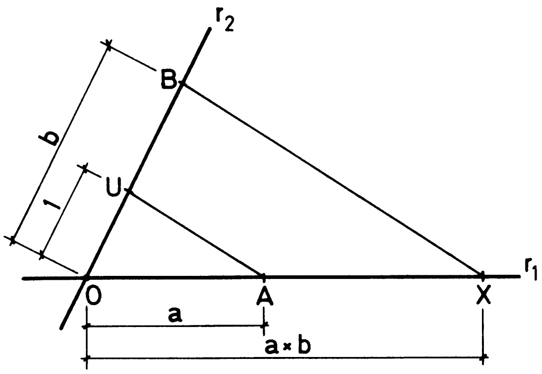
El punto Y corresponde al número real $b - a$. Si queremos representar $a - b(b > a)$ entonces sobre la recta real llevamos el segmento OB a partir de A, como en la figura el segmento $\overline{OZ}$ tiene longitud $b - a$ pero el punto Z está situado a la izquierda de O, luego representa al número real $-(b - a) = a - b$.



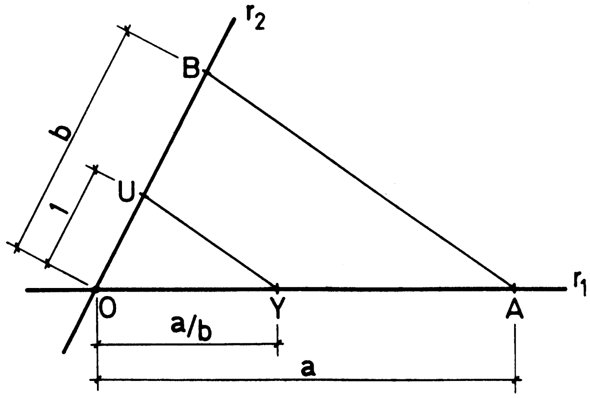
En conclusión a la suma y diferencia de números reales corresponde la suma y diferencia de segmentos sobre la recta real. La correspondencia entre números y puntos respeta la suma.

Por otra parte si decimos que un punto A de una recta es anterior a otro B si está a la izquierda de B, resulta que la correspondencia entre números reales y puntos de la recta también respeta el orden: $b > a \Rightarrow A$ anterior a B.

Veamos ahora cómo interpretar geométricamente el producto de dos números a y b no nulos. Tracemos dos recta que se cortan en un punto O, marcamos los puntos U, A y B de manera que $\overline{OU} = 1$, $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, tracemos la recta UA y una paralela a ella por B que corta en X. Por esta construcción sabemos que el triángulo OUA es semejante al triángulo OBX luego $\dfrac{a}{1} = \dfrac{x}{b}$ o sea $x = ab$. Entonces el segmento OX mide $a \cdot b$



Finalmente representemos el cociente de los números reales $\frac{a}{b}$, $(b \neq 0)$



Construimos, igual que antes, dos rectas que se cortan en O y marcamos los puntos U, A y B, trazamos la recta BA y una paralela a ella por U. Esta corta en Y a la otra recta. De la semejanza de los triángulos OAB y OUY resulta que

$$\frac{a}{b} = \frac{y}{1}, \text{ luego } y = \frac{a}{b}$$

El segmento OY mide entonces $\frac{a}{b}$.

Como conclusión obtenemos que la correspondencia entre los números reales y los puntos de la recta es tan buena que respeta el orden y las operaciones aritméticas, en el sentido descrito arriba.

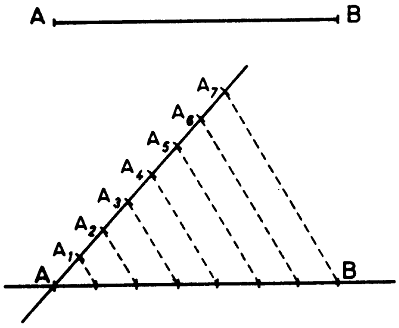
PROBLEMAS Y EJERCICIOS

1. Dividir un segmento en n partes iguales.

   Solución: Supongamos que queremos dividir el segmento AB en siete partes iguales

   A ***B***

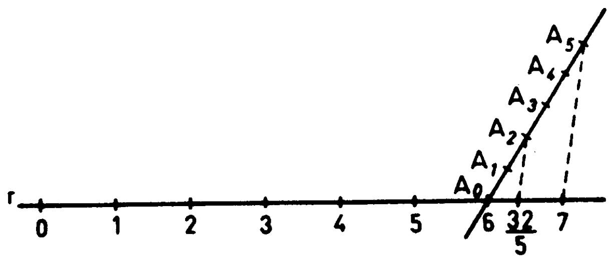
   Trazamos una recta cualquiera, que pase por A y sobre ella llevamos con el compás siete segmentos iguales $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_6A_7$



Trazamos la recta A_7, B y paralelas a ella por los puntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Los puntos de corte de estas paralelas con el segmento AB lo dividen en siete partes iguales. ¡Explique por qué!

2. Utilice el problema uno para representar el número racional $\frac{m}{n}$ en la recta real.

   Solución: Supongamos que quiere representar el número $\frac{32}{5}$ en la recta real. $\frac{32}{5} = 6 + \frac{2}{5}$. Trazamos una recta cualquiera que pase por 6 y con el compás llevamos 5 segmentos iguales $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_4A_5$. Ahora trazamos la recta A_57. La paralela a ella por A_2 corta en el punto que representa $\frac{32}{5}$. ¡Explique por qué!



3. Construya gráficamente los puntos de la recta real que representan los siguientes números

   a) $\frac{1}{7}$
   b) $\frac{5}{12}$
   c) $\frac{31}{8}$
   d) $-\frac{4}{5}$
   e) $-\frac{25}{4}$
   f) $-\frac{33}{7}$

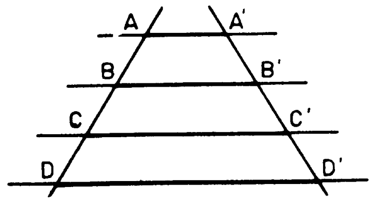
4. Demuestre que si a, b, c y d son números reales, distintos entre si y no nulos, y si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces:

   a) $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$
   b) $\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a-c}{b-d}$
   c) $\dfrac{a+c}{a-c} = \dfrac{b+d}{b-d}$
   d) $\dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{b}{d}$

Probemos (a) como ejemplo:

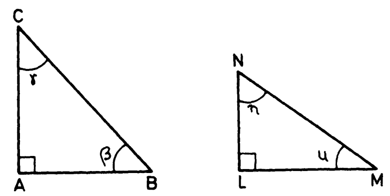
Si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ entonces $\dfrac{a}{b} + 1 = \dfrac{c}{d} + 1$, luego $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$.

5. Utilizando la figura interprete como relación entre segmentos las 4 igualdades anteriores



EJERCICIOS SOBRE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS. (En cada caso citar los teoremas empleados)

6. Sean ABC y LMN dos triángulos rectángulos



Cuáles de las siguientes condiciones son suficientes para garantizar la congruencia de los triángulos dados

a) $\overline{AC} = \overline{LN}$ y $\overline{AB} = \overline{LM}$

b) $\overline{AC} = \overline{LN}$ y $\overline{BC} = \overline{MN}$

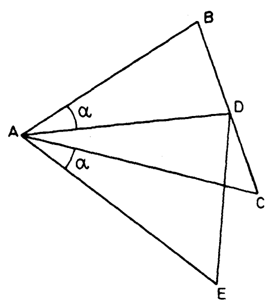
c) $BC = MN$ y $\gamma = \eta$

d) $\gamma = \eta$ y $\beta = \mu$

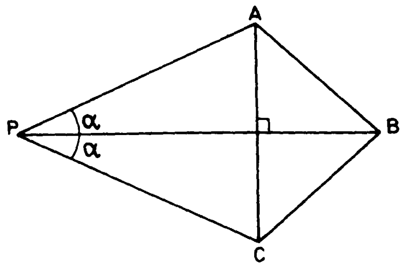
e) $\overline{AC} = \overline{LN}$ y $\beta = \mu$

f) $\overline{BC} = \overline{MN}$ y $\beta = \mu$

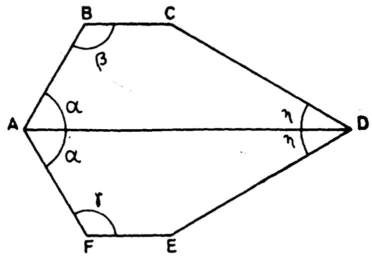
7. Consideremos la figura siguiente; donde $\overline{AB} = \overline{AD}$ y $\overline{AC} = \overline{AE}$. Se pide probar que los triángulos ABC y ADE son congruentes.



8. De la figura siguiente probar que ΔPAB es congruente con ΔPCB



9. Consideremos la figura que sigue

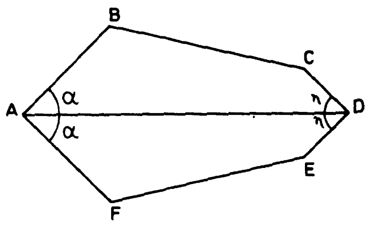


$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AF} \\ \overline{BC} &= \overline{FE} \\ \overline{CD} &= \overline{DE} \end{aligned}$$

Se pide probar que $\beta = \gamma$.

Sugerencia: pensar en términos de triángulos.

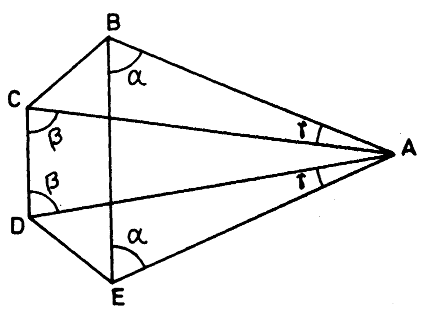
10. Consideremos ahora la figura:



$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AF} \\ \overline{CD} &= \overline{DE} \end{aligned}$$

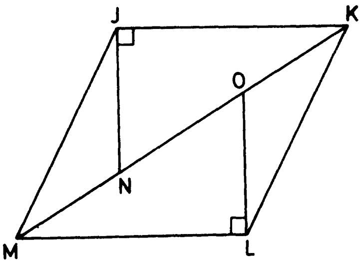
Probar que $\overline{BC} = \overline{EF}$

11. A partir de



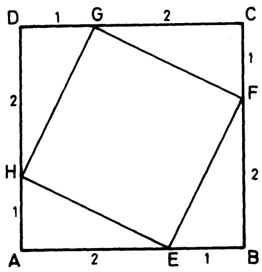
Probar que $\overline{BC} = \overline{DE}$

12. Si $JKLM$ es un paralelogramo,



Probar que $\overline{OL} = \overline{JN}$

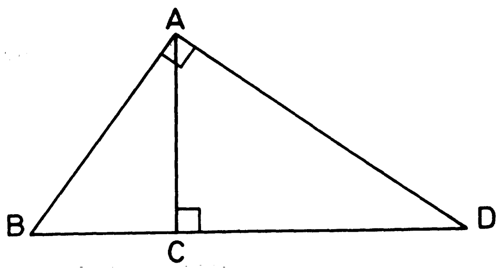
13. En la figura anterior probar que ΔMJN es congruente a ΔKLO.
14. Si $ABCD$ es un cuadrado



Probar que $HEFG$ es un cuadrado

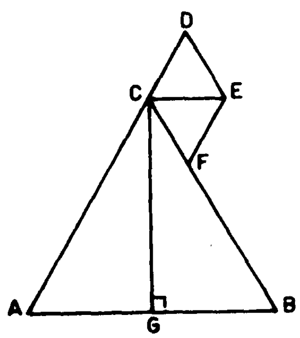
EJERCICIOS SOBRE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS. (En cada caso citar los teoremas empleados)

15. Consideremos la figura



Probar que ΔCAB es semejante a ΔADB.

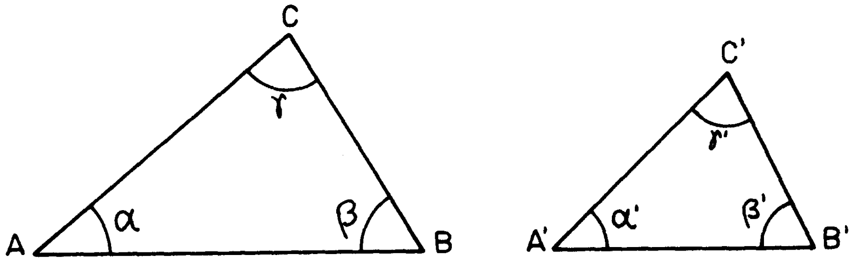
16. Consideremos la figura siguiente



$$\begin{aligned} \overline{AB} &= d \\ \overline{AC} &= \overline{BC} \\ \overline{CD} &= \overline{CF} = k \\ EF &\parallel CD \\ DE &\parallel CF \\ CE &\parallel AB \\ CG &= \ell \end{aligned}$$

Se pide probar que $\overline{CE} = \dfrac{2dk}{\sqrt{d^2 + 4\ell^2}}$. (Usar el teorema de Pitágoras).

17. ¿Cuáles de las siguientes condiciones son suficientes para garantizar la semejanza de dos triángulos ABC y $A'B'C'$?



a) $\alpha = \alpha'$

b) $\alpha = \alpha', \ \dfrac{\overline{BA}}{\overline{B'A'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$

c) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$

d) $\alpha = \alpha', \ \gamma = \gamma'$

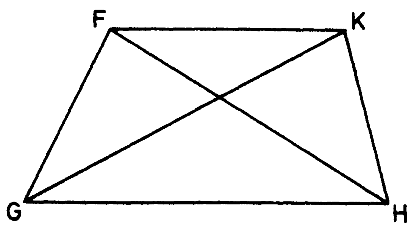
e) $\overline{AB} = 20, \ \overline{BC} = 16, \ \overline{AC} = 12, \ \overline{A'B'} = 20, \ \overline{A'C'} = 16$

f) $\alpha = \alpha', \ \overline{AC} = 5, \ \overline{A'C'} = 6, \ \overline{AB} = 10, \ \overline{A'B'} = 16$

g) $\alpha = 60°, \ \beta = 40°, \ \beta' = 40°, \ \gamma' = 80°$

h) $\overline{A'B'} = \dfrac{5}{4}AC, \ \overline{B'C'} = \dfrac{5}{4}BC, \ \gamma = \gamma'$

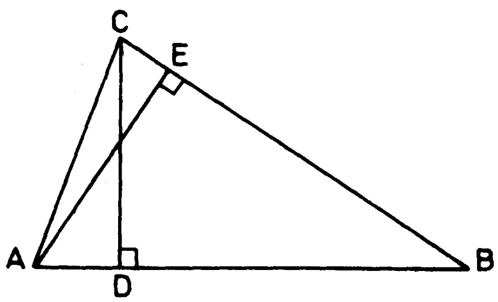
18. Sea $FGHK$ un trapezoide, (FK paralela a GH).



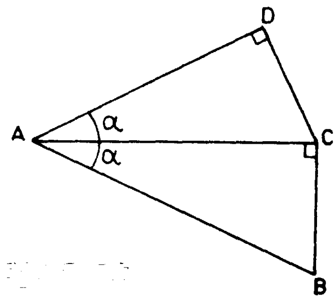
¿Cuáles triángulos son semejantes?

Indicar los lados correspondientes y escribir una ecuación que indique que los lados correspondientes son proporcionales.

19. Probar que ΔABE es semejante con ΔCBD



20. De la figura siguiente probar que los dos triángulos son semejantes.



21. Con la construcción geométrica apropiada comprobar cada uno de los siguientes puntos:

i) $(-1)\cdot(a) = -a$,

ii) $(-1)\cdot(a+b) = -a-b$,

iii) $(-1)\cdot(-a) = a$,

iv) $\frac{-1}{-1} = +1$

v) $\frac{1}{-1} = -1$.

En estos ejercicios a y b pueden tomarse arbitrariamente positivos o negativos.

22. Dadas las siguientes medidas de ángulos en grados, escribirlas en radianes.

a) $90°$
b) $45°$
c) $60°$
d) $30°$
e) $120°$
f) $270°$
g) $15°$
h) $125°$

23. Dadas las siguientes medidas de ángulos en radianes, escribirlas en grados.

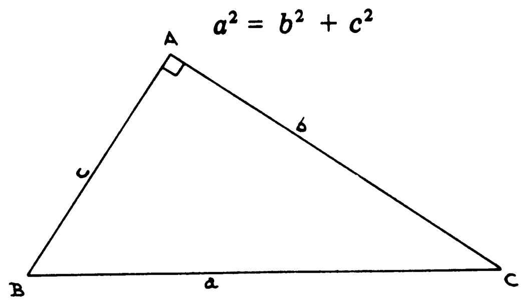
a) $\dfrac{\pi}{4}$
b) $\dfrac{4\pi}{3}$
c) $\dfrac{5\pi}{7}$
d) $\dfrac{\pi}{3}$
e) $\dfrac{5\pi}{2}$
f) 1
g) $6,28$
h) $\dfrac{\pi}{8}$

CAPíTULO 2

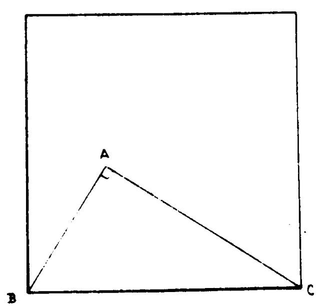
REPASO DE TRIGONOMETRÍA

En esta guía y en la siguiente haremos un breve repaso de Trigonometría. Antes de comenzar este tema vamos a hablar un poquito sobre el Teorema de Pitágoras, ya que toda la Trigonometría gira en torno a este Teorema.

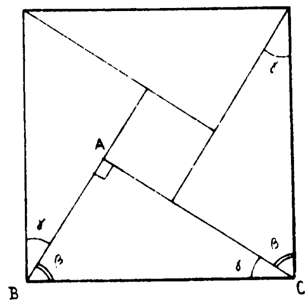
El Teorema de Pitágoras establece una relación entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo. Concretamente, dice que el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos:



Geométricamente, ésto puede interpretarse diciendo que el área del cuadrado construido con la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos con los catetos. Una demostración gráfica sería la siguiente: construimos el cuadrado que tiene por lado la hipotenusa, así:

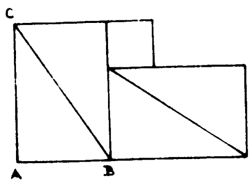


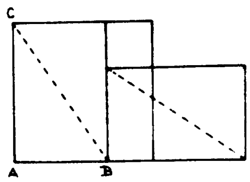
Ahora dibujamos estos cuatro triángulos:



Todos son congruentes con el triángulo ABC ¿por qué?

Luego recortamos, con tijeras, los cuatro triángulos y el cuadrado central y los pegamos así: obtenemos la suma de dos cuadrados:



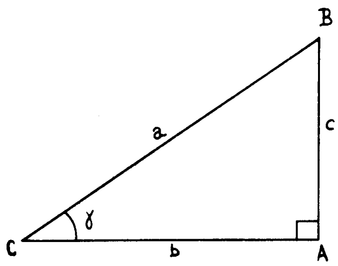


El cuadrado grande tiene por lado el cateto AC y el cuadrado pequeño tiene por lado el cateto AB. ¿Por qué?

Aunque el teorema es atribuido a Pitágoras, filósofo griego (532 a.C.), esta demostración ya era conocida por los Chinos 1.000 años antes que él, sin embargo es de Pitágoras de quién lo heredamos en nuestra cultura.

DEFINICIÓN DE SENO, COSENO Y TANGENTE DE UN ÁNGULO AGUDO γ

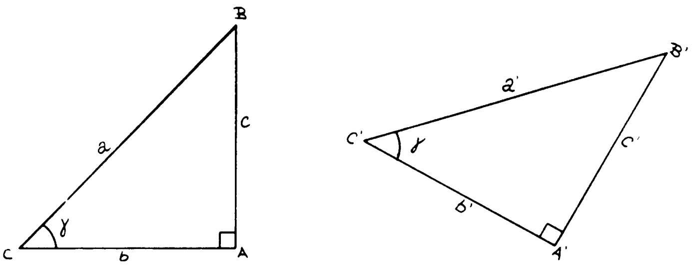
Consideremos un triángulo rectángulo y sea γ uno de sus ángulos agudos; definimos



$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\gamma &= \tfrac{c}{a}, \\ \cos\gamma &= \tfrac{b}{a}, \quad \text{y} \\ \operatorname{tg}\gamma &= \tfrac{c}{b} \end{aligned}$$

Estos números son características del ángulo γ y no dependen de las longitudes a, b y c de los lados del triángulo. Veamos por qué:

Si tenemos dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo igual, γ, dichos triángulos son semejantes

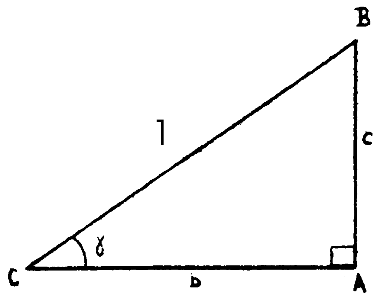


Luego: $\dfrac{c}{a} = \dfrac{c'}{a'}$; $\dfrac{b}{a} = \dfrac{b'}{a\prime}$; $\dfrac{c}{b} = \dfrac{c'}{b\prime}$

Las inversas de estos números tienen también importancia y reciben el nombre de cosecante, secante y cotangente de γ.

$$\operatorname{cosec}\gamma = \frac{1}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{a}{c};\ \sec\gamma = \frac{1}{\cos\gamma} = \frac{a}{b};\ \operatorname{cotg}\gamma = \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{b}{c}$$

Como el seno, el coseno y la tangente de γ son independientes de las longitudes de los lados del triángulo, podemos imaginar que la longitud de la hipotenusa es $a = 1$, entonces:



$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\gamma &= c \\ \cos\gamma &= b, \quad \text{y} \\ \operatorname{tg}\gamma &= \tfrac{c}{b} \end{aligned}$$

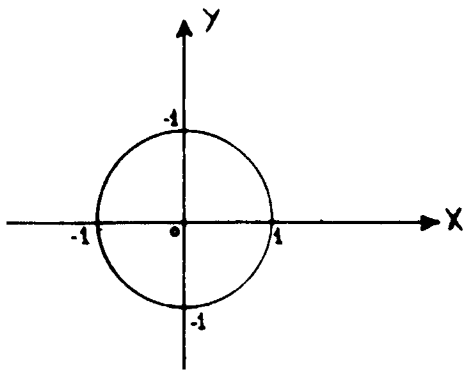
Ahora el teorema de Pitágoras toma la siguiente forma: $\operatorname{sen}^2\gamma + \cos^2\ \gamma = 1$. De esta fórmula y de las definiciones de las funciones trigonométricas, resultan todas las fórmulas de Trigonometría que Ud. estudió en bachillerato. Por ejemplo, dividiendo por $\cos^2\alpha$ se obtiene $\operatorname{tg}^2\gamma + 1 = \sec^2\gamma$.

Más adelante recordaremos las fórmulas usuales de la Trigonometría.

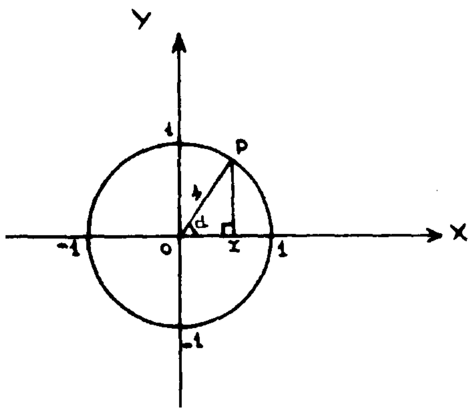
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

Queremos definir las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo cualquiera α, aunque no sea agudo.

Consideremos un sistema de coordenadas rectangulares y una circunferencia. de radio 1, con centro en el origen de coordenadas O.

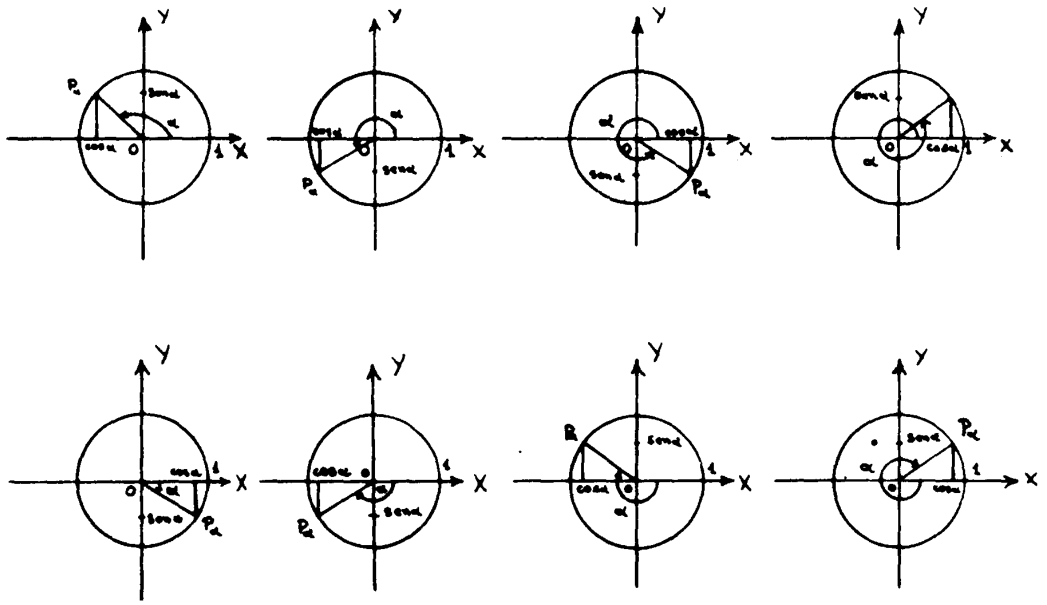


Ahora observe que si se toma un punto P sobre la circunferencia, en el primer cuadrante, queda bien determinado un triángulo rectángulo ΔOPX, con hipotenusa OP y catetos PX y OX (ver la figura). Observe que como PX es perpendicular al eje X, la distancia $\overline{OX}$ entre 0 y X es precisamente la abscisa de P, $\overline{XP}$ la ordenada de P. Además, como $\overline{OP} = 1$ por ser el radio de la circunferencia, el triángulo OPX es un triángulo con hipotenusa de longitud 1, y por lo tanto $\operatorname{sen}\alpha = \overline{PX}$, $\cos\alpha = \overline{OX}$, es decir, el seno del ángulo α es la ordenada de P y el coseno de α la abscisa del punto P.



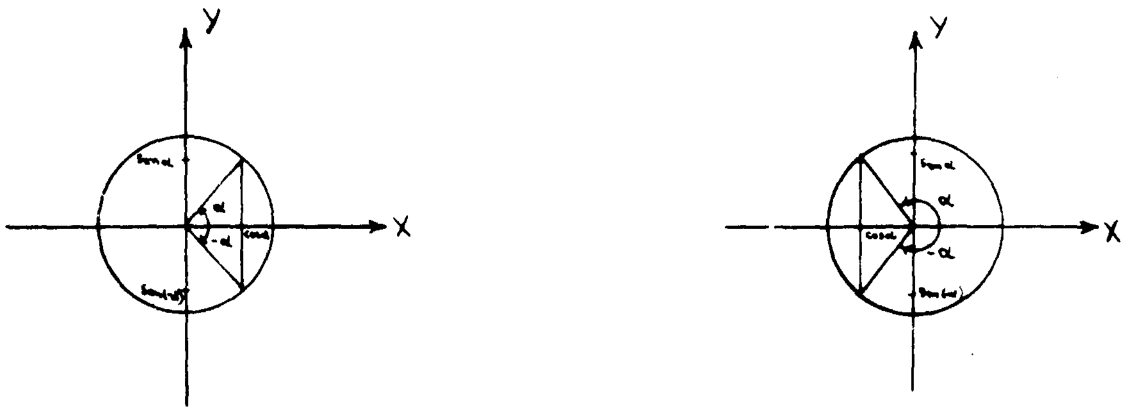
En resumen, si α es un ángulo agudo, podemos hallar el coseno y el seno de α como la abscisa y la ordenada, respectivamente, del punto P.

Al darnos cuenta de este hecho, podemos definir el coseno de α y el seno de α para cualquier ángulo haciendo lo siguiente: se construye el ángulo α con vértice en 0 y midiendo desde el eje X, de manera que uno de los lados del ángulo es el eje X. El segundo lado define un punto P sobre la circunferencia. Definimos $\cos\alpha$ como la abscisa de P y sen α como la ordenada de P.



Estudie cuidadosamente las figuras para que vea todos los casos posibles, y tome nota de que los signos dependen únicamente del cuadrante al que pertenece P.

Con esta construcción es fácil darse cuenta de varias propiedades de las funciones seno y coseno. Por ejemplo, la siguiente figura ayuda a entender que
$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

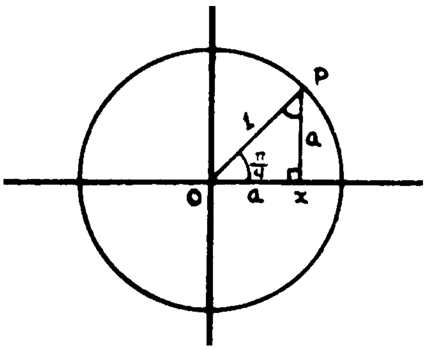


Además para cualquier α sigue siendo válida la identidad $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, por el teorema de Pitágoras.
Ahora definimos $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, siempre que $\cos\alpha$ sea no nulo, es decir $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$, etc. Las demás funciones trigonométricas se definen igual que antes.

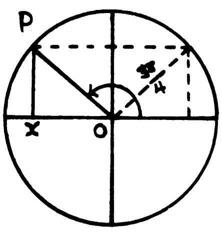
Para poder usar la Trigonometría en la construcción de triángulos debemos conocer el valor de las funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera y recíprocamente. Existen tablas que dan valores aproximados de estas funciones, también se usaba una regla de cálculo y actualmente se usa una calculadora científica de bolsillo donde pueden hallarse estos valores para cualquier ángulo. Sin embargo, vamos a calcular estas funciones para algunos ángulos notables.

1. Si $\alpha = 0$, es claro que $\operatorname{sen} \alpha = 0, \ \cos \alpha = 1, \ \operatorname{tg} \alpha = 0$
2. Si $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ (radianes) (o bien $\alpha = 90^\circ$) entonces $\operatorname{sen} \alpha = 1 \cos \alpha = 0$ y $\operatorname{tg} \alpha$ no está definida.
3. Si $\alpha = \pi$ (ó $\alpha = 180^\circ$) entonces $\operatorname{sen} \alpha = 0, \ \cos \alpha = -1, \ \operatorname{tg} \alpha = 0$
4. Si $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$(ó $\alpha = 270^\circ$) $\operatorname{sen} \alpha = -1, \ \cos \alpha = 0$ y $\operatorname{tg} \alpha$ no está definida.
5. Si $\alpha = 2\pi$ el punto P de la circunferencia coincide con el punto correspondiente a 0, luego las funciones trigonométricas de 2π son las mismas de 0.

   En general, $\beta = \alpha + 2k\pi$, donde k es un entero, entonces es claro que las funciones trigonométricas de α y β coinciden.
6. Si $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$(o bien $\alpha = 45^\circ$) entonces el triángulo OPX es isósceles $PX = OX$ y como $1 = \overline{PX^2} + \overline{OX^2} = a^2 + a^2$ resulta $a^2 = \dfrac{1}{2}$ y $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, luego $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4} = \cos \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \ \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{4} = 1$

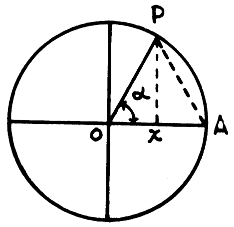


7. Si $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$ (o bien $\alpha = 135^\circ$) entonces



$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \tfrac{3\pi}{4} &= \operatorname{sen} \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{3\pi}{4} &= -\cos \tfrac{\pi}{4} = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} &= -\operatorname{tg} \tfrac{\pi}{4} = -1 \end{aligned}$$

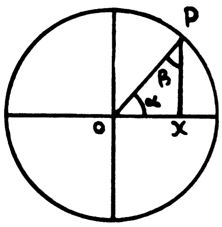
8. De manera análoga se calculan las funciones trigonométricas de $\dfrac{5\pi}{4}$ y $\dfrac{7\pi}{4}$
9. Si $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$(o bien $\alpha = 60^\circ$) entonces ΔOPA isósceles y ángulo $\alpha = 60^\circ$ implica ΔOPA equilátero, entonces $OX = \frac{1}{2}$



$$PX = \sqrt{\overline{OP^2} - \overline{OX^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Luego: $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2},\ \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

10. Si $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ o bien $\alpha = 30°$, entonces observando el triángulo OPX notamos que $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$ y $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$, luego

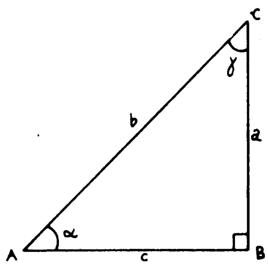


$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Por costumbre, se llama resolución de un triángulo a su construcción, cuando se utiliza la trigonometría. Esto viene quizás del hecho de que en realidad calculamos las medidas de sus lados y ángulos en lugar de construirlos gráficamente.

PRIMER CASO. Del triángulo ABC conocemos el ángulo α y el cateto a. En este caso podemos calcular $b,\ c$ y γ:



$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha,\ b = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$$

y $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ por Pitágoras.

SEGUNDO CASO. Si conocemos a y b. Entonces podemos calcular $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ y $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{a}{b}$. Usando la calculadora podemos hallar α y finalmente obtenemos $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$.

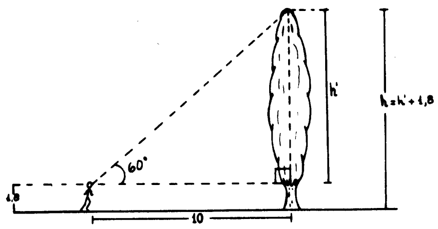
TERCER CASO. Si conocemos α y b, podemos calcular: $a = b\operatorname{sen}\alpha,\ c = b\cos\alpha,\ \gamma = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$

CUARTO CASO. Si conocemos α y c, podemos calcular: $b = \dfrac{c}{\cos\alpha},\ a = \sqrt{b^2 - c^2},\ \gamma = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$

EJEMPLOS Y APLICACIONES

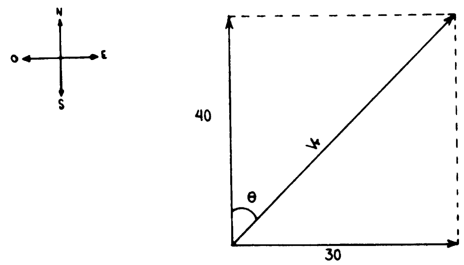
1. Una persona de 1,80 metros de estatura desea medir la altura h de un árbol sabiendo que a una distancia de 10 metros el extremo superior se observa bajo un ángulo de $60°$ respecto a la horizontal. ¿Cómo puede hacer?

   La figura que sigue lo indica:



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 60° = \frac{h'}{10},\ h' = 10 \operatorname{tg} 60° &= 10\sqrt{3} = 17,32\,\mathrm{m} \\ h = h' + 1,80 &= 19,12\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

2. Una lancha navega hacia el norte con una velocidad de 40 Km/h., en un río cuya corriente se dirige hacia el este con velocidad de 30 Km/h. Un observador en tierra firme desea saber cuál es la velocidad resultante V_r de la lancha y la dirección en que se mueve.



La velocidad resultante V_r se consigue usando la regla del paralelogramo para la suma de velocidades tomando en cuenta que la corriente arrastra la lancha a 30 Km/h.

De la figura anterior, usando el teorema de Pitágoras vemos que:

$$|V_r| = \sqrt{(40)^2 + (30)^2} = \sqrt{2500} = 50$$

La dirección del movimiento puede darse conociendo el ángulo θ:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{30}{40} = 0{,}75.$$

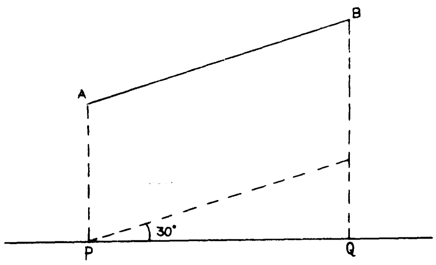
Con la calculadora buscamos el valor del ángulo (agudo) θ:

$$\approx 36°,\ 52' \left(36°, +52 \text{ minutos, } 1' = \frac{1°}{60}\right)$$

La lancha se mueve a 50 Km/h. en dirección $36°,\ 52'$ norte-este respecto a un observador en tierra firme.

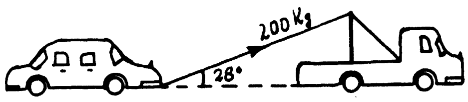
3. Si queremos hallar la proyección de un segmento sobre una recta y conocemos el ángulo que forma, $30°$ por ejemplo, el problema se reduce también a un triángulo rectángulo

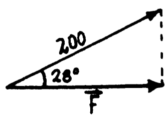
   La proyección será



$\overline{PQ} \;=\; \overline{AB}\cos 30,$ o sea $\overline{PQ} \;=\; \overline{AB}\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. Una grúa remolca un carro y conocemos la tensión de la guaya ($T = 200$ Kg) y el ángulo de la guaya ($\alpha = 28°$). Calcular la fuerza en la dirección del movimiento.

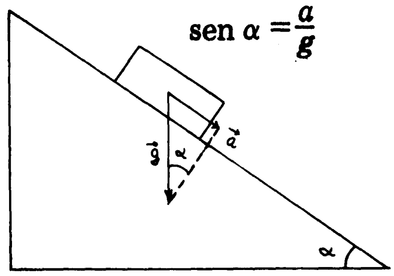




F es entonces la proyección de T sobre la horizontal

$F = T\cos 28° = 200 \times 0,88295 = 176,58952$ Kg.

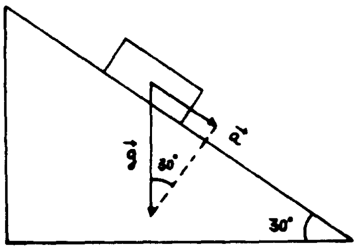
5. Conociendo la aceleración de un bloque que se desliza por un plano inclinado, calcule el ángulo de inclinación del plano: $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{a}{g}$



   Si $a = 3,5$ m/seg^2 entonces $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3,5}{9,8} = 0,35714$. Usando la calculadora encontramos $\alpha = 20°\ 55'\ 29,4''$.

6. Un bloque se desliza por un plano inclinado de ángulo $\alpha = 30°$ calcular la aceleración del bloque (despreciando el roce).

   La componente de la aceleración g, en la dirección del movimiento es $a = g\operatorname{sen}30 = \frac{1}{2}\,g$.



Entonces $a = 4,9 \text{ m/seg}^2$.

Finalmente presentamos un resumen de las fórmulas usuales de Trigonometría, que suponemos conocidas por Ud.

FÓRMULAS PARA LA SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS.

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \end{aligned}\right\} \text{Atención, deben usarse signos correspondientes}$$

FÓRMULAS PARA EL ÁNGULO DOBLE.

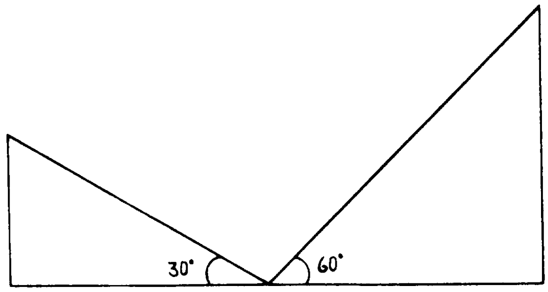
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\alpha &= 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \end{aligned}$$

FÓRMULAS PARA EL ÁNGULO MITAD.

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\tfrac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\tfrac{1-\cos\alpha}{2}} \\ \cos\tfrac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\tfrac{1+\cos\alpha}{2}} \\ \operatorname{tg}\tfrac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\tfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \end{aligned}\right\} \text{Los signos dependen del cuadrante que ocupa} \frac{\alpha}{2}.$$

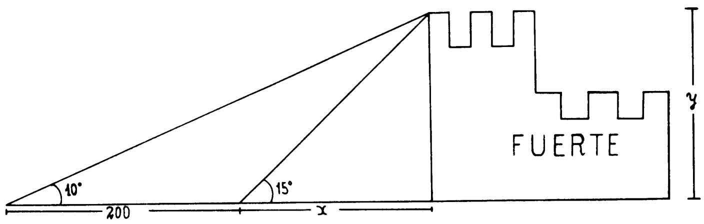
EJERCICIOS Y APLICACIONES

1. Desde el punto medio de la distancia entre los pies de dos torres, los ángulos de elevación de sus extremos superiores son $30°$ y $60°$ respectivamente, demostrar que la altura de una de las torres es el triple de la otra.



2. Al aproximarse una patrulla de reconocimiento a un fuerte situado en una llanura encuentra que, desde un cierto lugar el fuerte se ve bajo un ángulo de $10°$, y que desde otro lugar, 200 metros más cerca del fuerte, éste se ve bajo un ángulo de $15°$.

   ¿Cuál es la altura del fuerte y cuál es su distancia al segundo lugar de observación?



   Sugerencia: x e y son las cantidades pedidas (incógnitas); nótese que

$$\begin{aligned} y &= x \operatorname{tg} 15° \\ y &= (x + 200) \operatorname{tg} 10° \end{aligned}$$

   R: $x = 385$ m, $h = 103$ m aprox.

3. Con el fin de medir la altura h de un objeto, se ha medido la distancia l entre dos puntos A y B a lo largo de una recta horizontal que pasa por su base.

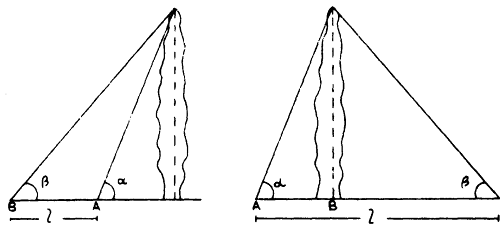
   Los ángulos de elevación de la punta del objeto desde A y B resultaron ser α y β respectivamente, siendo A el más cercano a la base. Demostrar que la altura está dada por la fórmula

$$h = \frac{l}{\cot\beta - \cot\alpha}$$

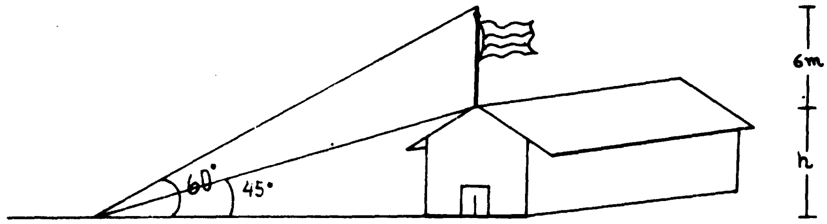
   si A y B están del mismo lado, y por

$$h = \frac{l}{\cot\beta + \cot\alpha}$$

   si A y B están en lados opuestos de la base del objeto.

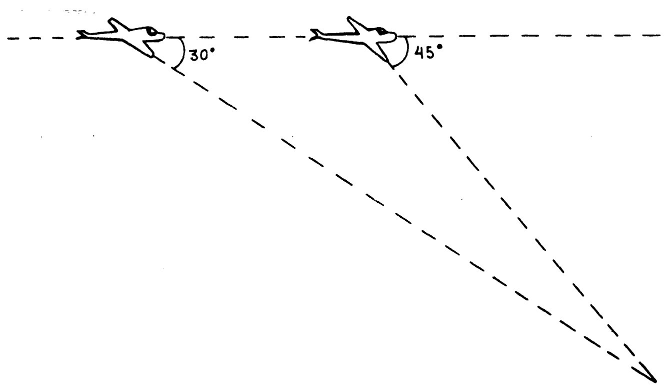


4. Una asta de bandera de 6 m., está parada sobre la azotea de una casa. Desde un punto del plano de la base de la casa, la punta y la base del asta se ven con ángulos de $60°$ y $45°$ respectivamente. Encontrar la altura de la casa.



R: $h = 8{,}20$ m

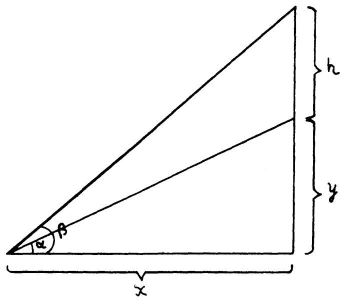
5. El piloto de un avión observa que el ángulo de depresión de una luz situada exactamente bajo su línea de vuelo es de $30°$. Un minuto más tarde el ángulo de depresión es de $45°$. Si está volando horizontalmente y siguiendo una línea recta a 90 Km/h., encontrar la altura a que está volando y la distancia de la luz al primer punto de observación.



6. Un vehículo comienza a correr a 100 Km/h., por una pendiente que forma $10°$ con la horizontal. ¿Cuánto tiempo tarda en elevarse 60 m.? R: $12{,}44$ segundos
7. En la figura siguiente conocemos α, β y h.

   Demostrar que x e y están dadas por las fórmulas

$$x = \frac{h}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha} \quad y = \frac{h \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}$$



8. Pruebe que

   a) $\operatorname{sen} 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

   b) $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

   c) $\operatorname{sen} 7^\circ 30' = \dfrac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$
   (Solución: $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ, 7^\circ 30' = \frac{15^\circ}{2}$)

9. Pruebe que $\cos 36^\circ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

   Solución: $\cos 36^\circ = \sqrt{\dfrac{1+\cos 72^\circ}{2}}$

   $$\cos 72^\circ = \operatorname{sen} 18^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 36^\circ}{2}}$$

   Resuelva el sistema de ecuaciones.

10. Dos barcos observan la parte superior de un faro situado entre ellos con ángulos de elevación de 30° y 60° respectivamente. Calcule la altura del faro si la distancia entre los barcos es de 200 m.

    Respuesta: $50\sqrt{3}$.m.

11. Calcule el perímetro de un triángulo ABC sabiendo que la altura h_A mide 100 m., el ángulo B mide 45° y el ángulo C mide 30°.

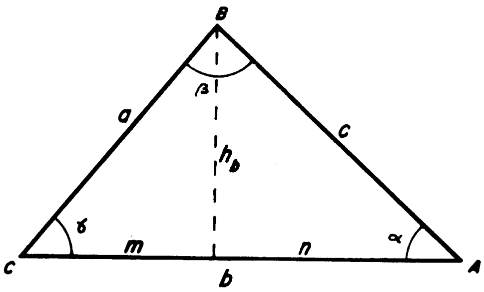
    Respuesta: 415 m.

CAPíTULO 3

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBTUSÁNGULOS Y ACUTÁNGULOS

La herramienta fundamental para resolver triángulos cualesquiera son los llamados Teorema del Coseno y Teorema del Seno. Veamos el primero.

TEOREMA DEL COSENO



Sea ABC un triángulo cualquiera: tenemos que $a^2 = h_b^2 + m^2$ por Pitágoras, pero $h_b^2 = c^2 - n^2$. Además $m = b - n$ y $n = c\cos\alpha$

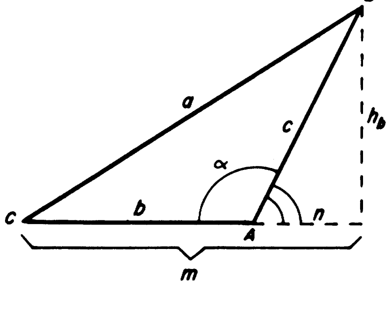
Sustituyendo tenemos:

$$a^2 = c^2 - n^2 + (b-n)^2 = c^2 + b^2 - 2bn = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

Esta fórmula resume el teorema del coseno. Notemos que si en lugar de ser α agudo, es un ángulo obtuso o recto tenemos el mismo resultado:

1. Si α recto, $\cos\alpha = 0$ y obtenemos el teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$
2. Si α es obtuso, tenemos la siguiente situación:



$$\begin{aligned} a^2 &= h_b^2 + m^2 \text{ pero} \\ h_b^2 &= c^2 - n^2 \text{ y } m = b + n. \end{aligned}$$

Sustituyendo obtenemos: $a^2 = c^2 - n^2 + (b+n)^2 = c^2 + b^2 + 2bn$ pero $n = c\cos(\pi - \alpha)$ y $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

Sustituyendo se obtiene: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

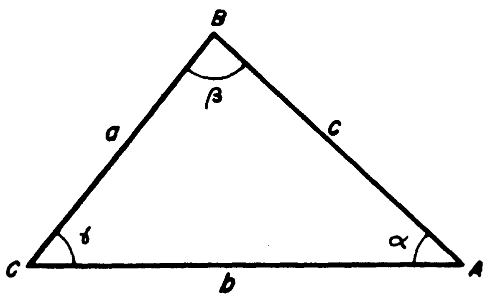
El teorema del coseno es entonces una generalización del Teorema de Pitágoras para triángulos cualesquiera.

Observando que $c\cos\alpha$ es la proyección de c sobre b el teorema se puede enunciar así:

> "En un triángulo cualquiera, el cuadrado de un lado a es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos, o más, el producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él, dependiendo de que el ángulo α sea agudo u obtuso."

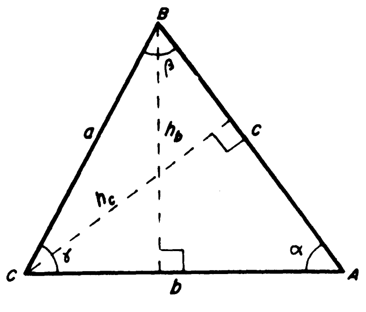
TEOREMA DEL SENO

Este teorema relaciona cada lado de un triángulo ABC con el seno del ángulo opuesto. Concretamente, dice que en todo triángulo ABC se tiene



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Para probar el teorema, tracemos las dos alturas h_b y h_c. Entonces:



$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= \frac{h_b}{c} \quad \operatorname{sen}\gamma \\ &= \frac{h_b}{a} \end{aligned}$$

luego: $h_b = c\operatorname{sen}\alpha = a\operatorname{sen}\gamma$, y de aquí obtenemos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

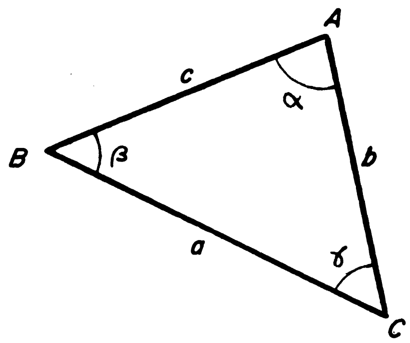
Del mismo modo $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{h_c}{b}$ y $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{h_c}{a}$, se obtiene $h_c = b\operatorname{sen}\alpha = a\operatorname{sen}\beta$, luego $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta}$.
Finalmente, hemos probado que

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}}$$

Podemos ahora comenzar los problemas relativos a triángulos oblicuángulos.

1. Supongamos que queremos resolver un triángulo, del cual conocemos dos ángulos α y β y el lado comprendido c :

   γ se calcula inmediatamente porque $\alpha+\beta+\gamma=180°$, luego $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$

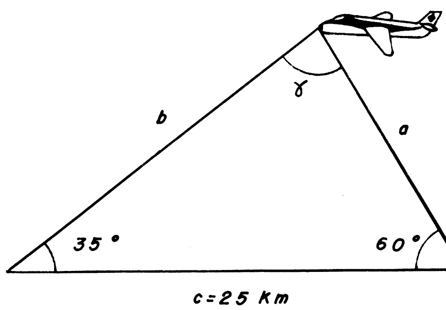
   El teorema del seno nos permite calcular a y b

   $$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\quad\text{luego}\quad a=\frac{c\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma}$$
   $$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}\quad\text{luego}\quad b=\frac{c\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}$$

   Ejemplo 1. Dos estaciones de radar, separadas por una distancia de 25 Km. detectan un avión que vuela justo sobre la recta que une a las dos estaciones. La primera lo ve con una elevación de 35°, la segunda con elevación de 60°. Calcular la distancia del avión a la primera estación.

   Solución: Hay que resolver un triángulo como el de figura y calcular b:

   $$\text{Primero } \gamma = 180° - 95° = 85°$$

   luego:
   $$\begin{aligned}\frac{b}{\operatorname{sen}60°}&=\frac{25}{\operatorname{sen}85°}\Rightarrow\\ b&=\frac{25\cdot\operatorname{sen}60}{\operatorname{sen}85°}\\ b&=\frac{\frac{25\sqrt{3}}{2}}{0,99619}\\ b&=21,7334\text{ Km.}\end{aligned}$$

2. Queremos ahora resolver un triángulo del cual sólo conocemos los tres lados a, b, y c.

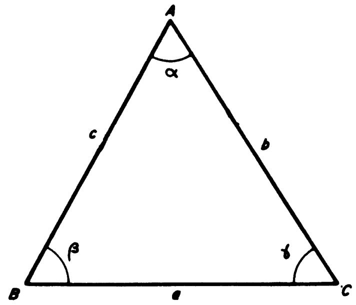
   Tenemos que calcular los tres ángulos, por el teorema del coseno obtenemos

   $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$

   $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$

   De aquí $\cos\gamma=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, $\cos\beta=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

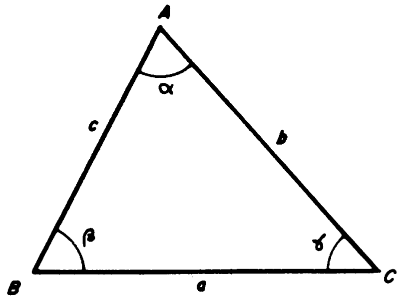
   Una vez hallados β y γ, obtenemos α :



$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$$

3. Queremos ahora resolver un triángulo del cual conocemos b, c y α.

   Por el teorema del coseno calculamos a.



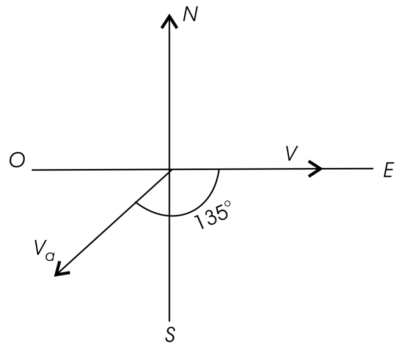
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Para calcular β, por ejemplo, usamos el teorema del seno $\dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$ luego $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{b\operatorname{sen}\alpha}{a}$. Finalmente $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

Ejemplo 2: Para llegar a tiempo a su destino, un barco navega en dirección este. De pronto sopla un viento de velocidad $\mathbf{V_a}$ y en dirección suroeste. ¿Cómo debe modificar su rumbo y su velocidad el barco para llegar a tiempo?

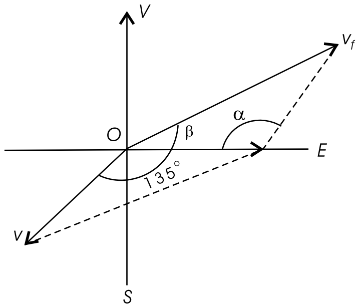
Solución: La velocidad resultante del barco debe ser en dirección este y su valor igual a $\dfrac{d}{t}$ donde d es la distancia que falta por recorrer y t el tiempo que debe tardar.

Entonces tenemos el siguiente esquema:



$$|\mathbf{V}| = \frac{d}{t}.$$

El barco debe modificar su rumbo y su velocidad de manera que la resultante sea $\mathbf{V}$, hay que resolver el triángulo $O\ \mathbf{V_f}\ V$ para calcular $|\mathbf{V_f}|$ y el ángulo β



Sabemos además que $\alpha = 135°$.

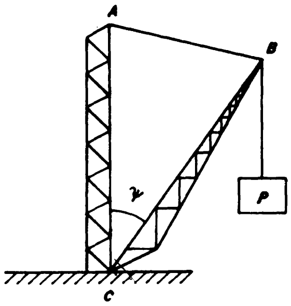
El teorema del coseno nos da:

$$|\mathbf{V_f}|^2 = |\mathbf{V_a}|^2 + |\mathbf{V}|^2 - 2|\mathbf{V_a}||\mathbf{V}|\cos\alpha$$

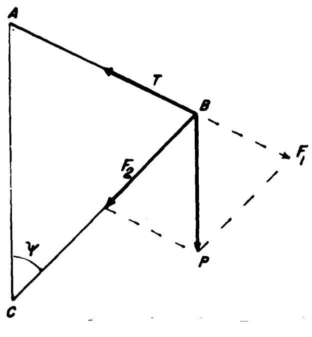
Por el teorema del seno calculamos β:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{|\mathbf{V_a}|\operatorname{sen}\alpha}{|\mathbf{V_f}|}$$

Ejemplo 3. La grúa de la figura tiene los dos brazos iguales. Suponiendo conocida la longitud de estos y el ángulos ψ, calcular la tensión producida en la guaya AB al levantar el peso P.

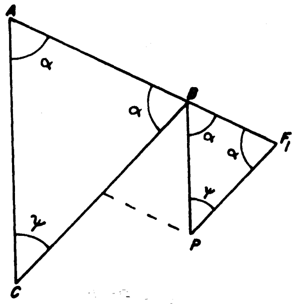


Solución: Descomponiendo el peso en dos fuerzas, una en la dirección de la guaya y otra en la dirección del brazo BC, se forma el triángulo de la figura.



La tensión T es en magnitud igual a $\mathbf{F_1}$. Hay que calcular $\mathbf{F_1}$ entonces.

Para esto tratemos de resolver el ΔBPF_1. Primero observamos que los ángulos marcados son iguales ¿por qué?



Entonces $2\alpha = 180 - \psi$ y $\alpha = \dfrac{180 - \psi}{2}$
Por el teorema de seno obtenemos

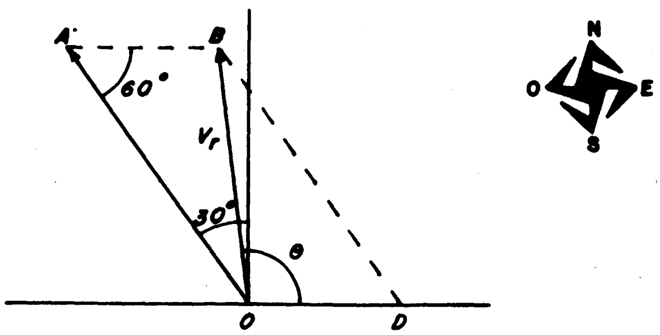
$$\frac{BP}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{BF_1}{\operatorname{sen}\psi} \text{ o sea } |\mathbf{F_1}| = \frac{|\mathbf{P}|\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Finalmente

$$|\mathbf{T}| = \frac{|\mathbf{P}|\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\left(90^\circ - \frac{\psi}{2}\right)} = \frac{|\mathbf{P}|\operatorname{sen}\psi}{\cos\frac{\psi}{2}}$$

Ejemplo 4. Una lancha atraviesa un río que tiene una corriente de 30 Km/h en dirección este, si la velocidad de la lancha es de 100 Km/h. y 30° hacia el noroeste, calcular la velocidad resultante de la lancha

Solución:



Debido al arrastre de la corriente y empleando la regla del paralelogramo obtenemos en el diagrama anterior la velocidad resultante $\mathbf{V_r}$.

Para conseguir $|\mathbf{V_r}|$ aplicamos el teorema del coseno al triángulo ABO.

$$\begin{aligned} |\mathbf{V_r}|^2 &= (30)^2 + (100)^2 - 2(30)(100)\cos 60^\circ \text{ ¿por qué? } - \\ |\mathbf{V_r}|^2 &= 7900 \\ |\mathbf{V_r}| &= 10\sqrt{79} \approx 88{,}882 \end{aligned}$$

El ángulo θ que hemos marcado en la figura anterior sirve para indicar la dirección del movimiento resultante de la lancha, podemos fijarnos en el triángulo BOD y aplicar el teorema del seno:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{100} = \frac{\operatorname{sen}60^\circ}{|\mathbf{V_r}|}$$

$$\operatorname{sen}\theta = 100\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{10\sqrt{79}} = 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{79}} \approx 0{,}97435$$

Buscando el valor de θ obtenemos:

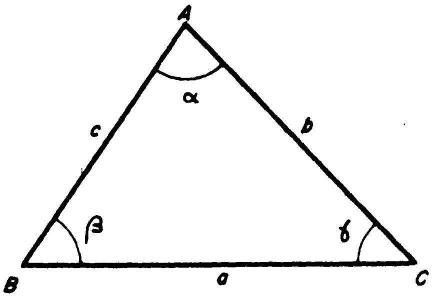
$$\theta \approx 77^\circ$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

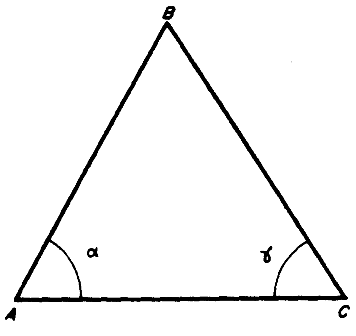
1. Para la resolución de algunos triángulos es útil la siguiente ley de las tangentes

$$\boxed{\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}}$$

Demuestre esta fórmula.



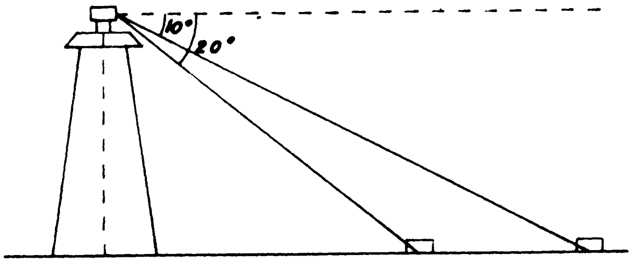
2. Se quiere encontrar la distancia de un punto A a un punto inaccesible, B, de la orilla opuesta de un río. Para ello medimos una distancia apropiada $AC = 283$ m., y los ángulos $\alpha = 38^\circ$, $\gamma = 66^\circ$, $18'$ como en la figura



R: Aprox. 268 m

3. Una escalera de 12 m. de longitud se coloca de modo que alcance una ventana de 10 m. de altura de un lado de la calle y haciéndola girar manteniendo su base fija puede alcanzar una ventana que está a 6 metros de altura del otro lado de la calle. Hallar el ancho de la calle. R: 16,92 m

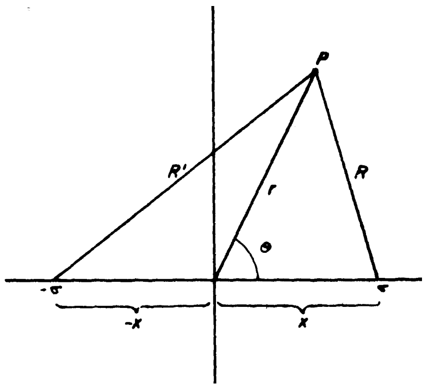
4. Dos boyas se encuentran al sur de un faro de 200 m. de altura. De lo alto del faro se ven con ángulos de depresión de $10°$ y $20°$ respectivamente. Encontrar la distancia entre las boyas.



5. Una grúa tiene un brazo de 20 m. de largo. ¿Cuánto se eleva el extremo del brazo cuando gira de $30°$ a $60°$?
6. El potencial eléctrico que producen dos cargas σ y $-\sigma$ en un punto P, situado a distancias R y R' de σ y $-\sigma$ respectivamente, es

$$V = \frac{\sigma}{R} - \frac{\sigma}{R'} = \sigma\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)$$

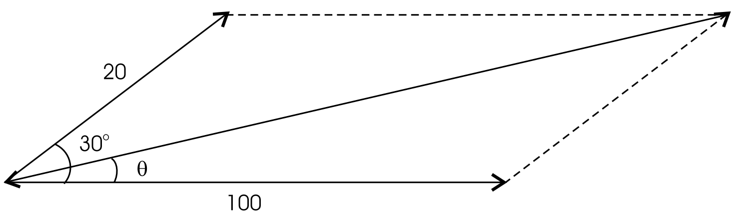
Considerar la figura siguiente:



Demostrar

$$V = \sigma\left(\frac{\sqrt{r^2 + x^2 + 2rx\cos\theta} - \sqrt{r^2 + x^2 - 2rx\cos\theta}}{\sqrt{(r^2 + x^2)^2 - (2rx\cos\theta)^2}}\right)$$

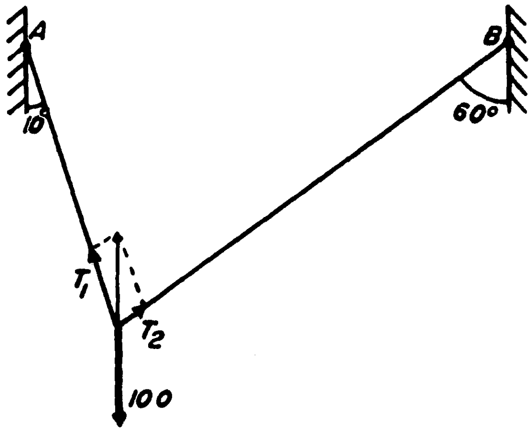
7. En un punto P se aplican fuerzas de 100 y 20 unidades como se indica en la figura



Usando la regla del paralelogramo calcular el valor de la fuerza resultante e indicar la dirección de la misma calculando el valor del ángulo θ.

Sugerencia: la suma de los ángulos internos de un paralelogramo es $360°$.

8. Un hilo está unido a dos paredes en dos puntos A y B (ver la figura). En un punto Intermedio del hilo se cuelga un objeto que da lugar a una fuerza de 100 unidades hacia abajo. Si la situación es la que se muestra en la figura, se pide calcular el valor de las fuerzas de tensión $\mathbf{T_1}$ y $\mathbf{T_2}$ que se originan en el hilo como consecuencia del peso que soportan.



Sugerencia: en vista de que el cuerpo colgado no cae debe tenerse que la resultante de las tensiones $\mathbf{T_1}$ *y* $\mathbf{T_2}$ *debe ser igual a* 100 *y está dirigida hacia arriba. Un uso adecuado de la geometría de la figura es lo que falta.*

9. Demuestre la fórmula de Herón para hallar el área del triángulo

$$\boxed{A = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}$$

10. En un triángulo ABC, el ángulo en A es el doble del ángulo en B.

    Si $b = 2$ y $c = \dfrac{5}{2}$ calcule el lado a.

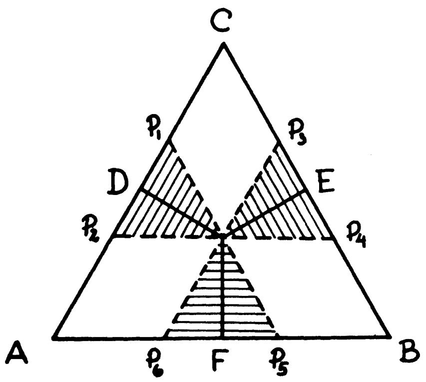
    Respuesta: $a = 3$.

11. Conociendo la longitud de los catetos a y b de un triángulo rectángulo, hallar la longitud de la bisectriz del ángulo recto

    Respuesta: $\dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$

12. Demostrar que la suma de las distancias desde un punto P interior a un triángulo equilátero ABC, a los lados de este triángulo es constante independiente de P.

    Prueba: tracemos por P tres rectas paralelas a los lados del triángulo, formando de ese modo tres triángulos equiláteros.



Es inmediato observar que la suma de todos los lados de los triángulos pequeños rayados en la figura es igual al perímetro del triángulo ABC, ahora,

$$\left.\begin{array}{l}\overline{PD} = PP_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \overline{PE} = \overline{PP_3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \overline{PF} = \overline{PP_5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF} = \left(\overline{PP_1} + \overline{PP_3} + \overline{PP_5}\right) \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

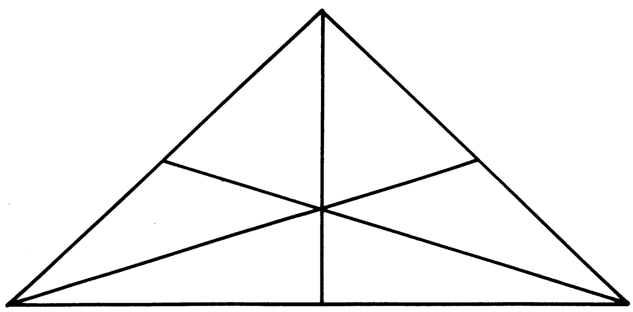
$$\text{Ahora,} \quad \begin{array}{rcl}\overline{PP_1} & = & \overline{PP_2} \\ \overline{PP_3} & = & \overline{PP_4} \\ \overline{PP_5} & = & \overline{PP_6}\end{array}$$

luego, $\overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF} = \dfrac{1}{2}\left(\overline{PP_1} + \overline{PP_2} + \overline{PP_3} + \overline{PP_4} + \overline{PP_5} + \overline{PP_6}\right) \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow PD + PE + PF = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ (Perímetro (ABC)).

13. Demostrar que en todo triángulo, al mayor lado le corresponde la menor bisectriz.
14. Hallar la razón entre el área del triángulo ABC y el área de otro triángulo, cuyos lados son iguales a los segmentos trazados desde los vértices a los puntos medios del lado opuesto (medianas).

    Respuesta: $\frac{3}{4}$



AUTOEVALUACIÓN

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA-1511—Modelo de Autoevaluación—

Sus respuestas las puede verificar en el Apéndice, en la página 344.

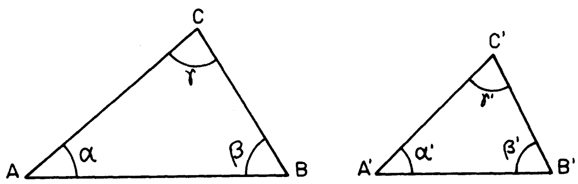
1. Suponga que los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes de manera que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}} = 3$$

Si se sabe que $\overline{AB} = 2\overline{C'B'}$, calcule la proporción $\frac{\overline{C'B'}}{\overline{A'B'}}$.

A	B	C	D	E	F
1/3	2/3	3/2	4/4	5/3	¡Ninguna!

2. Cuál de los siguientes conjunto de condiciones **NO es sufuciente** para concluir que los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ sean semejantes:

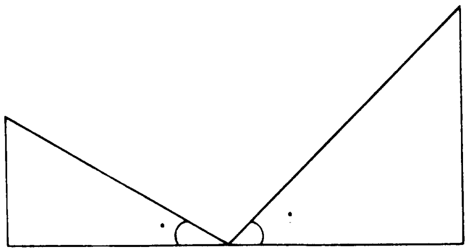


A	$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta'$
B	$\alpha = 60°, \quad \alpha' = 40°, \quad \beta = 40°, \quad \beta' = 80°$
C	$\alpha = 60°, \quad \alpha' = 40°, \quad \beta = 40°, \quad \beta' = 60°$
D	$\overline{A'B'} = 3\overline{AB}, \quad \overline{B'C'} = 3\overline{BC}, \quad \gamma = \gamma'$
E	$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}} = 3$
F	¡Ninguna!

3. Suponga que $\alpha = 5\pi/7\,\text{rad}$, y que $\beta = 15°$, entonces tenemos que :

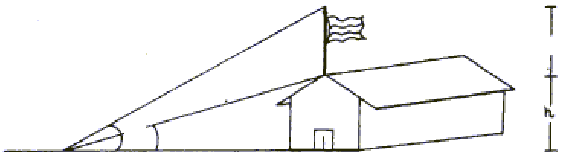
A	$\alpha \approx 128°\,34'\,17''$, $\beta \approx 0,26180\,\text{rad}$
B	$\alpha \approx 126°\,34'\,17''$, $\beta \approx 0,26180\,\text{rad}$
C	$\alpha \approx 126°\,24'\,17''$, $\beta \approx 0,26180\,\text{rad}$
D	$\alpha \approx 128°\,24'\,17''$, $\beta \approx 0,36180\,\text{rad}$
E	$\alpha \approx 128°\,34'\,17''$, $\beta \approx 0,3618$,rad
F	¡Ninguna!

4. Desde el punto medio de la distancia entre los pies de dos torres, los ángulos de elevación de sus extremos superiores son $34°$ y $58°$ respectivamente. La altura de la torre mayor es α veces la altura de la menor. Entonces, ¿en cuál intervalo está α?



A $\alpha \in [2,29\,;\ 2,30]$	B $\alpha \in [3,26\,;\ 3,27]$	C $\alpha \in [4,00\,;\ 4,01]$
D $\alpha \in [2,37\,;\ 3,38]$	E $\alpha \in [3,59\,;\ 3,60]$	F ¡Ninguna!

5. Una asta de bandera de 4m., está parada sobre el techo de un galpón. Desde un punto sobre el plano de la base del galpón, la punta y la base del asta se ven con ángulos de $62°$ y $48°$ respectivamente. Entonces la altura h, medida en metros, está en el intervalo:

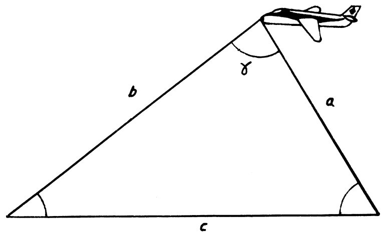


A $h \in [5,76\,;\ 5,77]$	B $h \in [6,05\,;\ 6,06]$	C $h \in [4,20\,;\ 4,21]$
D $h \in [5,29\,;\ 5,30]$	E $h \in [3,59\,;\ 3,60]$	F ¡Ninguna!

6. Un vehículo comienza a correr a 125 Km/h., por una pendiente que forma $10°$ con la horizontal. Entonces el tiempo t, medido en **segundos**, que tarda el vehículo en elevarse 200m., está en el intervalo:

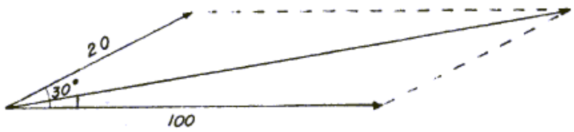
A $t \in [3,21\,;\ 3,22]$	B $t \in [0,0092\,;\ 0,0093]$	C $t \in [33,17\,;\ 33,18]$
D $t \in [0,92\,;\ 0,93]$	E $t \in [19,23\,;\ 19,24]$	F ¡Ninguna!

7. Dos estaciones de radar separadas una distancia de 36Km., detectan un avión que vuela justo sobre la recta que une a las dos estaciones. Los vigilantes ven al avión con una elevación de 27° y 50° respectivamente. Entonces la distancia b, medida en kilómetros, del avión a la primera estación (con ángulo de 27°) está en el intervalo:



A	$h \in [26,05\,;\; 26,06]$
B	$h \in [24,45\,;\; 24,46]$
C	$h \in [25,86\,;\; 25,87]$
D	$h \in [28,30\,;\; 28,31]$
E	$h \in [29,32\,;\; 29,33]$
F	¡Ninguna!

8. En un punto P se aplican fuerzas de 100 y 20 unidades como se indican en la figura.



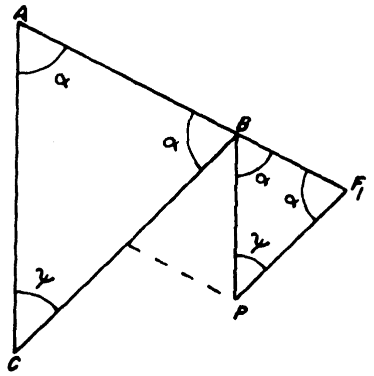
Calcule el valor de la fuerza F resultante y el ángulo θ que forma con la horizontal.

A	$F \approx 117,75$ unidades y $\theta \approx 4°\,52'$.
B	$F \approx 117,75$ unidades y $\theta \approx 6°\,32'$.
C	$F \approx 110,75$ unidades y $\theta \approx 4°\,52'$.
D	$F \approx 111,75$ unidades y $\theta \approx 4°\,52'$.
E	$F \approx 111,75$ unidades y $\theta \approx 6°\,52'$.
F	¡Ninguna!

9. Conociendo las longitudes a y b de los catetos de un triángulo rectángulo, hallar la longitud de la bisectriz del ángulo recto en términos de a y b .

A	$\frac{a+b}{\sqrt{2}}$
B	$\frac{a+b}{ab\sqrt{2}}$
C	$\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$
D	$\frac{\sqrt{2}}{ab}$
E	$\frac{\sqrt{2}}{a+b}$
F	¡Ninguna!

10. En la figura abajo, halle la longitud T del segmento BF_1 en términos de la longitud D del segmento BP y del ángulo ψ.



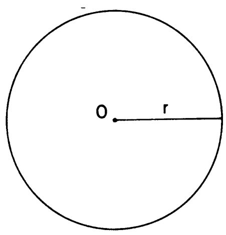
A $T = \frac{D\,\text{sen}(2\psi)}{\cos(\psi)}$	B $T = \frac{D\,\text{sen}(\psi)}{\cos(\psi/2)}$	C $T = \frac{D-\text{sen}(\psi/2)}{1+\cos(\psi/2)}$	D $T = \frac{D\,\text{sen}(\psi/2)}{\cos(\psi)}$
E $T = \frac{D+\text{sen}(\psi)}{1-\cos(\psi/2)}$	F ¡Ninguna!		

CAPíTULO 4

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

Una circunferencia es el conjunto de puntos de un plano que equidista de otro, llamado centro. La distancia común de los puntos de la circunferencia al centro se llama radio.

Al conjunto de puntos que verifica una determinada condición geométrica se le llama, por costumbre, *Lugar Geométrico.* Así, la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otro punto.

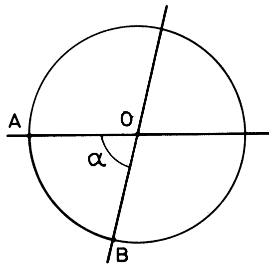


Una recta y una circunferencia pueden ocupar, en el plano, tres posiciones relativas distintas, según el número de puntos de corte:

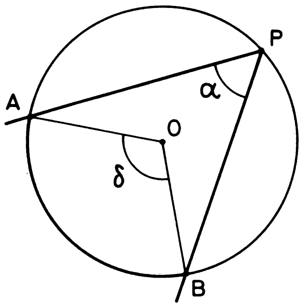
Nuestro propósito es estudiar relaciones métricas en la circunferencia. Comencemos con la medida de ángulos.

Consideremos un *ángulo central* en una circunferencia, es decir, un ángulo cuyo vértice está en el centro de la circunferencia. Es obvio que la medida del ángulo α y la longitud del arco AB están íntimamente ligados.

En el capítulo No. 1 vimos que la medida en radianes, del ángulo longitud α es $\dfrac{\text{longitud } \overset{\frown}{AB}}{\text{radio}}$.



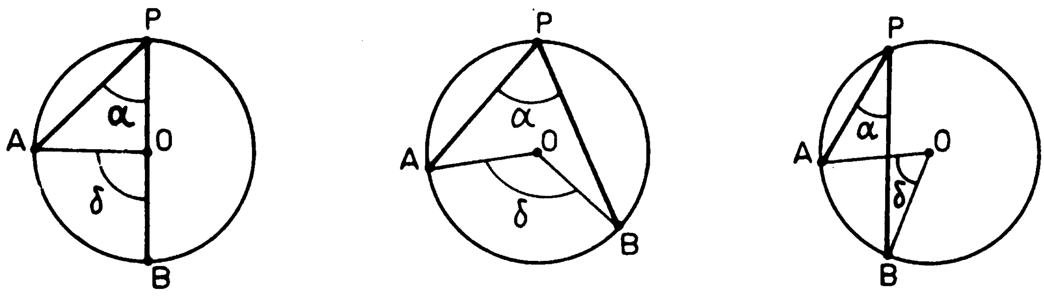
Si tenemos ahora un *ángulo inscrito* en la circunferencia. es decir, un ángulo cuyo vértice está en la circunferencia, ¿cómo se relaciona la medida del ángulo α y el arco AB?, o lo que es lo mismo ¿cómo se relaciona α y el ángulo central δ ?



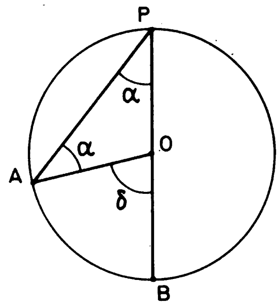
La respuesta a esta pregunta es el siguiente teorema:

TEOREMA 1. *Un ángulo inscrito en una circunferencia, APB, es igual a la mitad del ángulo central AOB. En otras palabras: $\alpha = \frac{1}{2}\delta$.*

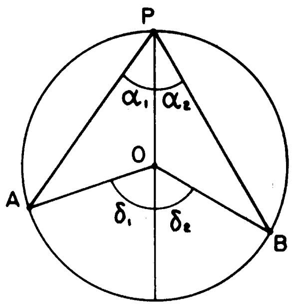
Para la demostración vamos a distinguir tres casos, según que el centro O esté sobre un lado del ángulo, sea interior al ángulo, o sea exterior.



Primer Caso: El centro está sobre uno de los lados del ángulo α. Consideremos el triángulo PAO. Es isósceles, por tener dos lados iguales: $PO = AO$. Como la suma de los tres ángulos de un triángulo es $180°$, resulta $2\alpha = \delta$. Luego $\alpha = \frac{\delta}{2}$.



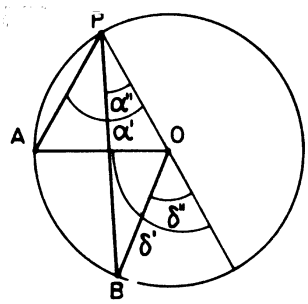
Segundo Caso: El centro O es interior al ángulo α. El diámetro que pasa por P divide al ángulo α. en dos ángulos α_1 y α_2, también divide al ángulo δ en dos ángulos δ_1 y δ_2.



Por el primer caso tenemos
$\alpha_1 = \frac{1}{2}\delta_1, \ \alpha_2 = \frac{1}{2}\delta_2,$
luego,
$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2) = \frac{1}{2}\delta.$

Tercer Caso: El centro O es exterior al ángulo α. Al trazar el diámetro por P se forman dos ángulos α' y α'' tales que $\alpha = \alpha' - \alpha''$.

Igualmente $\delta = \delta' - \delta''$.



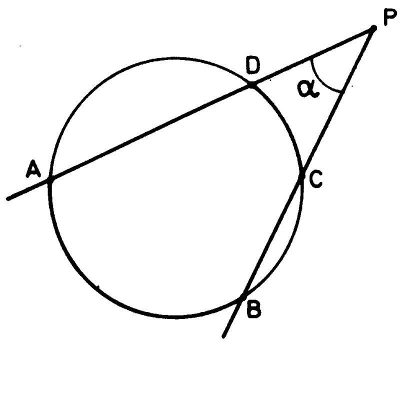
Por lo visto en el primer caso:

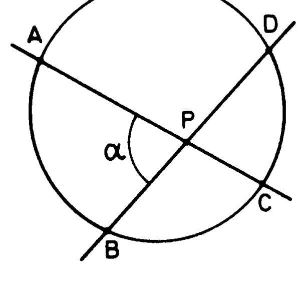
$\alpha' = \frac{1}{2}\,\delta'$, y, $\alpha'' = \frac{1}{2}\,\delta''$.

Luego:

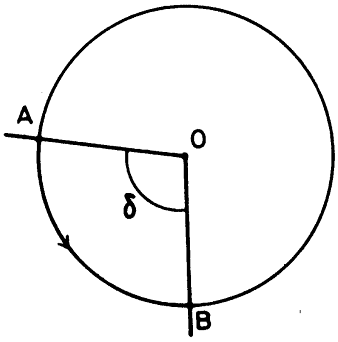
$\alpha = \alpha' - \alpha'' = \frac{1}{2}\,(\delta' - \delta'') = \frac{1}{2}\,\delta.$

Supongamos ahora que el punto P es interior o exterior a la circunferencia, pero los lados del ángulo son secantes. ¿Cómo se relacionan la medida del ángulo α con los arcos AB y CD?





Para evitar continuas referencias el ángulo central δ, vamos a convenir en llamar arco AB a la medida de este ángulo central, conviniendo en que los ángulos centrales son positivos si los tomamos en sentido contrario a las agujas del reloj. Igualmente los arcos positivos son los recorridos en este mismo sentido



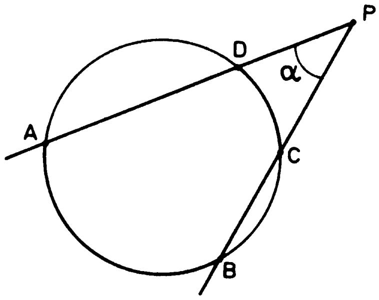
arco $AB = \delta$

Observación: No hay que confundir longitudes del arco AB con arco AB. La relación entre estos dos conceptos es la siguiente:

$$\text{arco } AB \text{ (medido en radianes)} = \frac{\text{longitud del arco } AB}{\text{radio}}$$

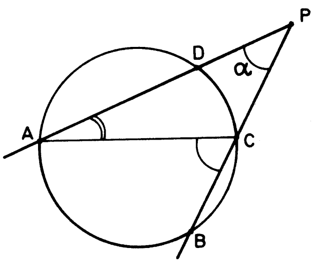
La respuesta a la pregunta de arriba la dan los dos teoremas siguientes:

TEOREMA 2. *Si P es exterior a la circunferencia:* $\alpha = \frac{1}{2}(\text{arco } AB - \text{ arco } CD)$.



Prueba: tracemos el segmento AC, se forma el triángulo PAC.

Por el resultado anterior:



$$\begin{aligned} \angle CAP &= \tfrac{1}{2} \text{ arco } CD \\ \angle PCA &= \pi - \angle ACB = \pi - \tfrac{1}{2} \text{ arco } AB \end{aligned}$$

Como la suma de los ángulos de un triángulo es π, obtenemos:

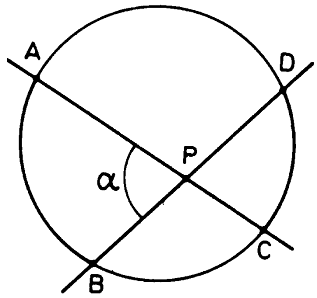
$$\angle CAP + \angle PCA + \angle APC = \pi\,;$$

Sustituyendo

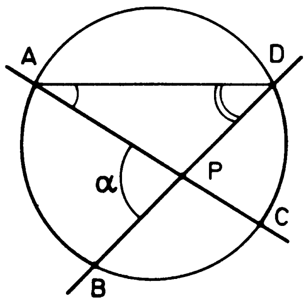
$$\frac{1}{2}\,\text{arco}\,CD + \pi - \frac{1}{2}\,\text{arco}\,AB + \alpha = \pi$$

De aquí obtenemos finalmente: $\alpha = \dfrac{1}{2}\,(\text{arco}\,AB - \ \text{arco}\,CD)$

TEOREMA 3. *Si P es interior a la circunferencia,* $\alpha = \dfrac{1}{2}\,(\ \textit{arco}\ AB + \ \textit{arco}\ CD)$



Prueba: Tracemos el segmento AD, se forma el triángulo APD. Por el primer teorema:



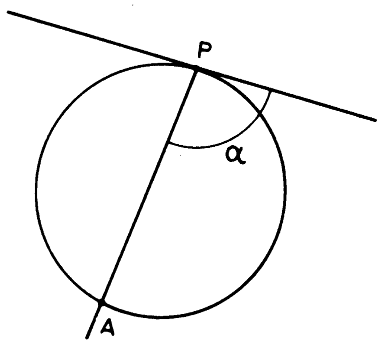
$$\angle CAD = \tfrac{1}{2}\,\text{arco}\,CD$$
$$\angle ADB = \tfrac{1}{2}\,\text{arco}\,AB$$

Como los tres ángulos de un triángulo suman π , se obtiene:

$$\alpha = \frac{1}{2}\,(\text{arco}\,CD + \ \text{arco}\,AB)$$

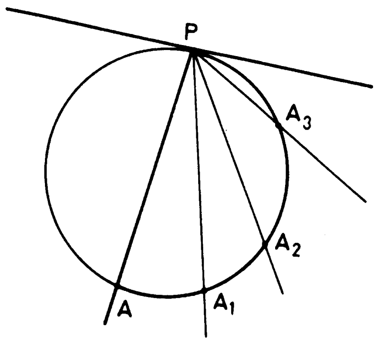
***

Consideremos ahora el caso de un ángulo semi inscrito en la circunferencia. El vértice P está en la circunferencia, pero uno de los lados es tangente a ella.

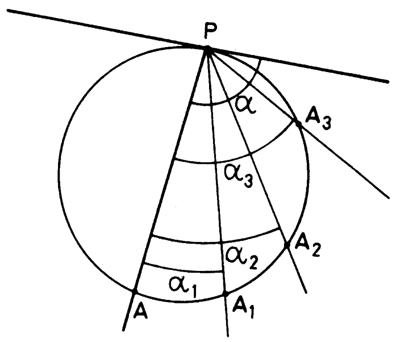


Una tangente es la posición límite de una secante, cuando los dos puntos de corte se acercan.

Si el punto A se acerca al punto P, la secante PA se acerca a una posición límite que es la tangente.



Entonces la medida del ángulo α se obtendrá como el limite de las medidas de los ángulos α_1, α_2, α_3 etc. Estas medidas son

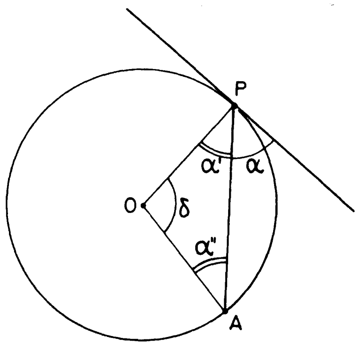


$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2} \text{ arco } AA_1$$
$$\alpha_2 = \tfrac{1}{2} \text{ arco } AA_2$$
$$\alpha_3 = \tfrac{1}{2} \text{ arco } AA_3$$

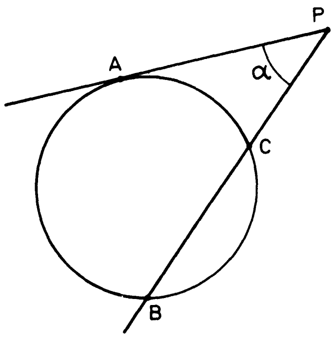
Cuando el punto A_n se acerca más y más al punto P, el arco AA_n se acerca más y más al arco AP. Entonces, en el límite se obtiene

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ arco } AP$$

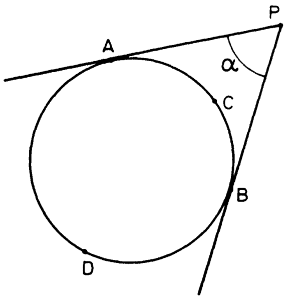
Si el argumento anterior no le ha convencido, demuestre usted mismo el resultado usando la siguiente figura.



Consideremos ahora los casos de estas dos figuras. Los resultados escritos a la derecha deben parecer claros



$$\alpha = \frac{1}{2}(\text{arco } AB - \text{ arco } CA)$$

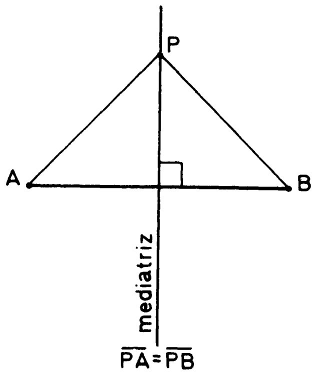


$$\alpha = \frac{1}{2}(\text{arco } ADB - \text{ arco } BCA)$$

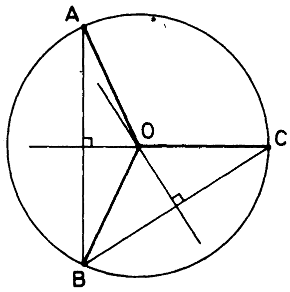
Los tres teoremas anteriores nos dicen cómo medir ángulos referidos a una circunferencia. Veamos ahora una aplicación de esto:

Sabemos que por tres puntos no alineados de un plano pasa una única circunferencia. Hagamos un paréntesis para recordar este resultado.

La Mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento. La mediatriz es la recta perpendicular al segmento por su punto medio.



Consideremos ahora tres puntos no alineados del plano A, B y C. Queremos construir una circunferencia que pase por los tres puntos, hay que determinar el centro y el radio de esa circunferencia. Como el centro O de la circunferencia debe estar a igual distancia de A y de B, debe estar sobre la mediatriz de AB. Por razón análoga, debe estar sobre la mediatriz de BC. Entonces O debe ser el punto de corte de estas dos mediatrices y el radio de la circunferencia es $\overline{OA}$.



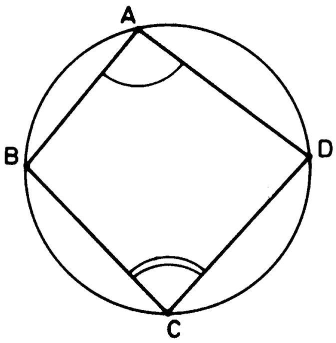
$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$

Lo anterior nos da una manera de construir dicha circunferencia. Para ver que ésta es única, basta darse cuenta de que si A, B y C no son colineales, las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se cortan en un solo punto.

* * *

Veamos el siguiente problema. Si tenemos cuatro puntos no alineados en el plano A, B, C y D; ¿existirá, o no existirá, una circunferencia que pase por los cuatro puntos?

Supongamos primero que los cuatro puntos A, B, C y D están en una circunferencia.



Entonces:
$$\begin{aligned} \measuredangle A &= \frac{1}{2} \text{ arco } BCD \\ \measuredangle C &= \frac{1}{2} \text{ arco } DAB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego: } \measuredangle A + \measuredangle C &= \frac{1}{2} \text{ arco } BCD + \frac{1}{2} \text{ arco } DAB \\ &= \frac{1}{2} 2\pi = \pi \end{aligned}$$

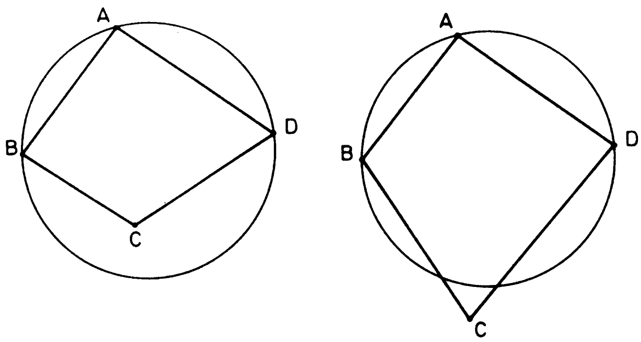
Este resultado puede ser enunciado como un teorema:

TEOREMA 4. *Si un cuadrilátero $ABCD$ es inscriptible (es decir, si los cuatro puntos A, B, C y D están en una circunferencia) entonces los ángulos opuestos son suplementarios (suman π).*

El recíproco de este teorema también es cierto, sí $ABCD$ es un cuadrilátero y dos de sus ángulos opuestos son suplementarios, el cuadrilátero es inscriptible.

Supongamos que $\measuredangle A$ y $\measuredangle C$ son suplementarios: $\measuredangle A + \measuredangle C = \pi$.

Sabemos que existe una circunferencia que pasa por A, D y B, hay que probar que pasa también por C. Supongamos que no pase por C, entonces el punto C es interior o exterior a la circunferencia. De las dos figuras de abajo y de los teoremas 2 y 3 es fácil concluir que en cualquiera de estos casos los ángulos $\measuredangle A$ y $\measuredangle C$ no pueden ser suplementarios. Luego si $\measuredangle A + \measuredangle C = \pi$, al punto C no le queda más remedio que estar en la circunferencia. Con esto hemos probado el siguiente teorema.

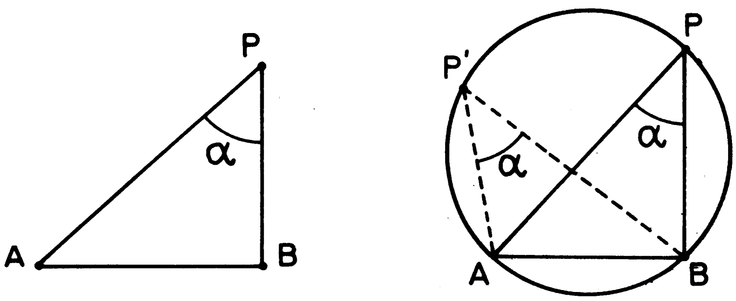


TEOREMA 5. *Un cuadrilátero es inscriptible si y sólo sí sus ángulos opuestos son suplementarios.*

ARCO CAPAZ

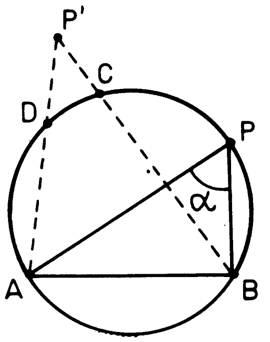
El lugar geométrico de los puntos del plano, desde los cuales se ve un segmento fijo AB, bajo un ángulo fijo α, es dos arcos de circunferencia.

Vamos a probar este resultado, al mismo tiempo damos una manera de construir con regla y compás dichos arcos. Supongamos que P es un punto que goza de las propiedades mencionadas arriba: el ángulo APB es α.

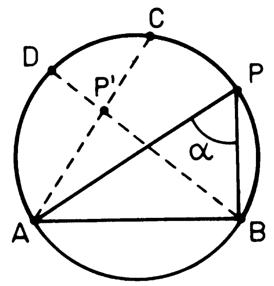


Tracemos la circunferencia que pasa por A, P y B. Es claro que cualquier punto P' del arco APB también goza de la misma propiedad ya que $\measuredangle AP'B = \measuredangle APB = \alpha = \frac{1}{2}$ arco AB.

También es claro que si el punto P' está fuera del arco APB, el ángulo $AP'B$ será mayor o menor que α

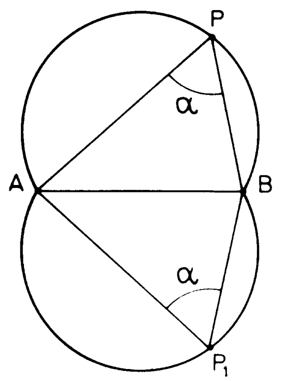


$$\measuredangle AP'B = \frac{1}{2}(\text{ arco } AB - \text{ arco } CD) < \alpha$$

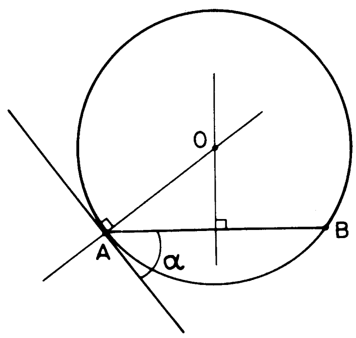


$$\measuredangle AP'B = \frac{1}{2}(\text{ arco } AB + \text{ arco } CD) > \alpha$$

Además del arco APB, podemos obtener por simetría otro arco AP_1B, cuyos puntos gozan de la misma propiedad



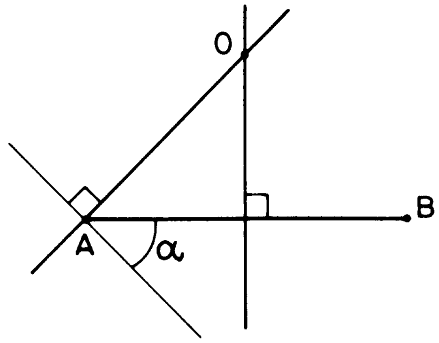
Para construir el arco capaz con regla y compás, observemos que el ángulo que forma la tangente en A con el segmento AB es también α.



Entonces el centro O del arco está sobre la perpendicular a esta tangente, trazada por A. También está sobre la mediatriz de AB.

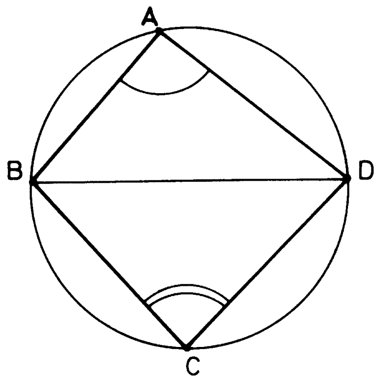
Entonces para construir el arco capaz basta copiar el ángulo α en el extremo de AB y trazar la perpendicular y la mediatriz descritas arriba.

El punto de corte de estas dos rectas es el centro del arco



La demostración del teorema 4, se puede hacer ahora mucho más sencilla utilizando el arco capaz.

Basta observar que si DAB es el arco capaz del ángulo $\measuredangle A$ y el segmento DB, entonces BCD es el arco capaz del ángulo $(\pi - \measuredangle A)$ y el mismo segmento DB.



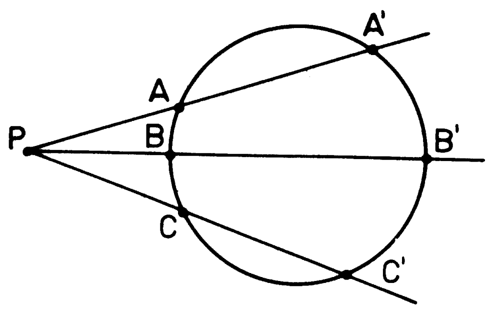
* * *

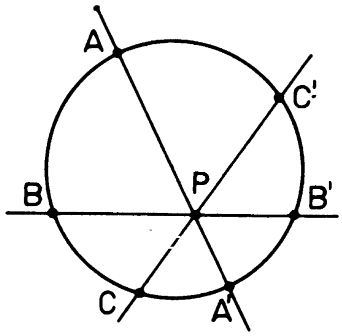
POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA

Vamos a dar ahora otra condición para que cuatro puntos A, B, C y D estén sobre una misma circunferencia.

Primero consideremos un punto P exterior o interior a la circunferencia y tracemos secantes que pasen por P.

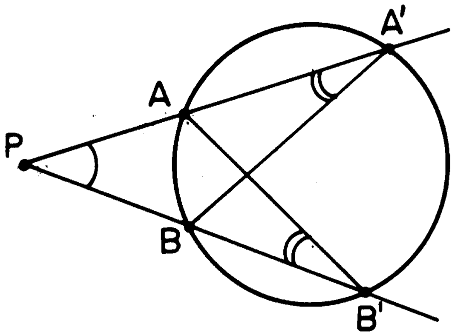
Vamos probar que cualquiera que sea la secante, el producto $\overline{PA} \cdot \overline{PA'}$ es constante. Es decir $\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PB} \cdot \overline{PB'} = \overline{PC} \cdot \overline{PC'}$ etcétera.

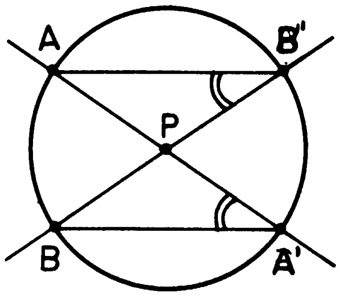




Este producto se llama *potencia de P* respecto a la circunferencia: Potencia de $P = \overline{PA} \cdot \overline{PA'}$.

Consideremos dos secantes cualesquiera:



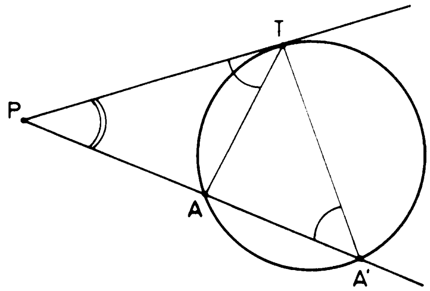


En cada caso unamos A con B' y A' con B, se forman dos triángulos $\Delta PAB'$ y $\Delta PBA'$. Estos dos triángulos tienen el ángulo en P igual y además el ángulo en A' es igual al ángulo en B', ambos iguales a $\frac{1}{2}$arco AB, luego los triángulos son semejantes.

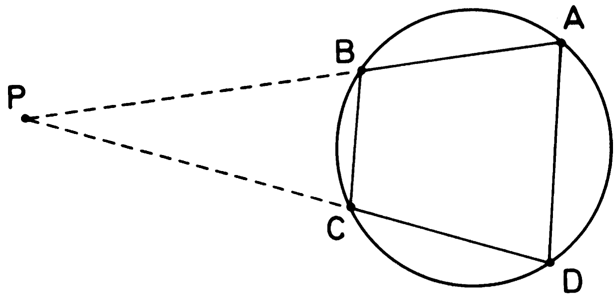
$\Delta PAB' \approx \Delta PBA'$. De aquí resulta que $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PA'}}$, luego $\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PB} \cdot \overline{PB'}$.

***

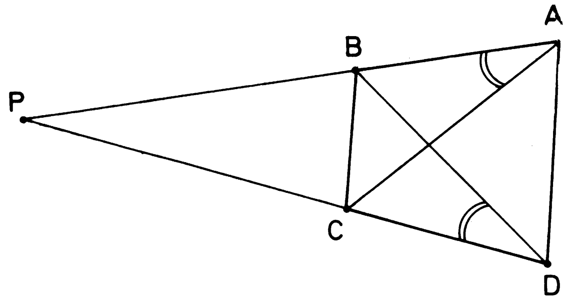
Observación: Si PT es tangente a la circunferencia, entonces la potencia de P respecto a la circunferencia es $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PA'}$ ya que los triángulos ΔPTA y $\Delta PTA'$ son semejantes.



Volvamos ahora al problema de un cuadrilátero inscriptible. Si $ABCD$ es inscriptible, $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PD} \cdot \overline{PC}$



Recíprocamente si el cuadrilátero $ABCD$ es tal que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$, entonces $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$ y los triángulos APC y DBP son semejantes por tener dos pares de lados proporcionales y el ángulo comprendido igual: $\Delta APC \approx \Delta DBP$



De aquí resulta que $\measuredangle BAC = \measuredangle BDC$ Es decir, $\measuredangle A$ y $\measuredangle D$ están sobre el arco capaz del ángulo $\measuredangle BAC$ respecto al segmento BC, luego el cuadrilátero es inscriptible.

Enunciemos el resultado como un teorema:

TEOREMA 6. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero con al menos dos lados opuestos no paralelos, por ejemplo AB y DC. Si P es el punto de corte de estos dos lados, el cuadrilátero es inscriptible en una circunferencia si y sólo si $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PD} \cdot \overline{PC}$.*

Observación: Si los dos pares de lados opuestos son paralelos, el cuadrilátero es un paralelogramo que será inscriptible solamente en el caso de que sea un cuadrado o un rectángulo (¿por qué?).

PROBLEMAS Y EJERCICIOS

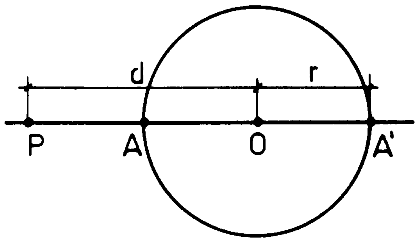
1. Construir con regla y compás un triángulo ABC del cual se conoce el ángulo A, el lado BC y la altura h_a.

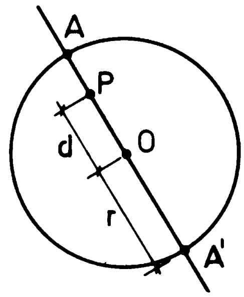
   Solución: Se construye el segmento BC, se traza el arco capaz del ángulo A respecto al segmento $\overline{BC}$.

   Ahora se traza una paralela a BC a distancia h_a, (dos soluciones, una, o ninguna, según que esta paralela sea secante, tangente o exterior al arco).

2. Conociendo la distancia d de un punto P al centro O de una circunferencia y conociendo el radio r de la circunferencia, pruebe la potencia de P es $d^2 - r^2$ (o $r^2 - d^2$).

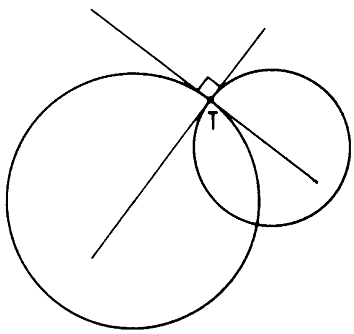
   Solución:

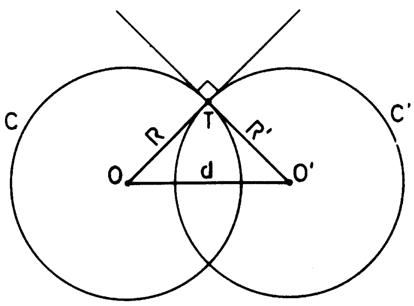
   $$\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = (d - r)(d + r) = d^2 - r^2 \quad \overline{PA} \cdot \overline{PA'} = (r - d)(r + d) = r^2 - d^2$$

3. Dos circunferencias son ortogonales si las tangentes en el punto de corte se cortan en ángulo recto.

   a) Pruebe que dos circunferencias son ortogonales si y sólo si el cuadrado de la distancia entre los centros es igual a la suma de los cuadrados de los radios.

   Solución:

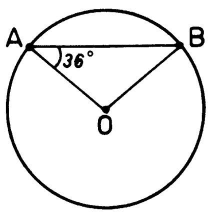
   

   Las circunferencias son ortogonales si y sólo si la tangente a una de ellas, por el punto de corte, pasa por el centro de la otra (¿por qué?). Entonces en el triángulo OTO' se tiene $d^2 = R^2 + R'^2$.

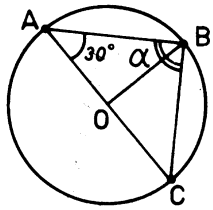
   b) Pruebe que dos circunferencias son ortogonales si y sólo si la potencia del centro de una de ellas, respecto a la otra, es igual al cuadrado de su radio.

4. En cada figura de abajo, calcule los ángulos pedidos.

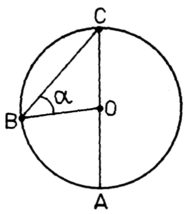
a) $\begin{array}{rcl} \text{arco } AB & = & ? \\ \text{arco } BA & = & ? \end{array}$



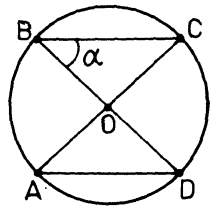
b) $\begin{array}{rcl} \alpha & = & ? \\ \text{arco } BC & = & ? \end{array}$



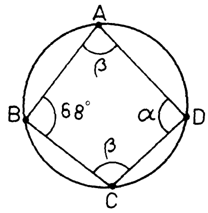
c) $\begin{array}{rcl} \text{arco } BA & = & 70° \\ \alpha & = & ? \end{array}$



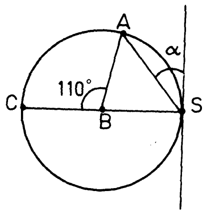
d) $\begin{array}{rcl} \text{arco } AD & = & 140° \\ \alpha & = & ? \end{array}$



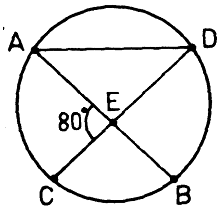
e) $\begin{array}{rcl} \alpha & = & ? \\ \beta & = & ? \end{array}$



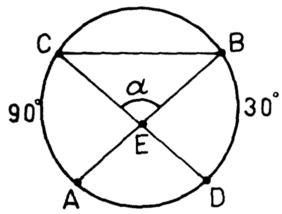
f) $\alpha = ?$



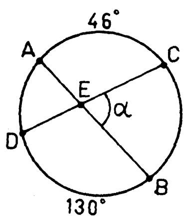
g) $\begin{array}{rcl} \text{arco}AC & = & 100 \\ \text{arco } BD & = & ? \end{array}$



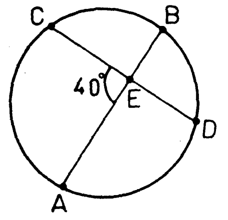
h) $\alpha = ?$



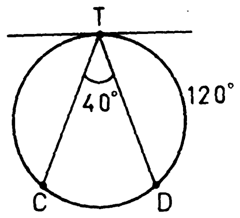
i) $\alpha = ?$



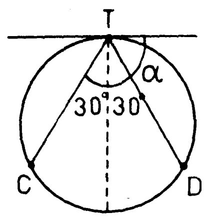
j) arco $DB = ?$, arco $CA = 55°$



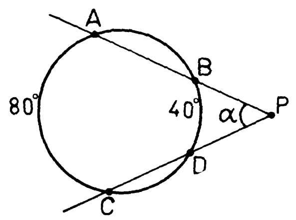
k) arco $TC = ?$



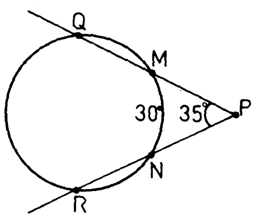
l) $\alpha = ?$



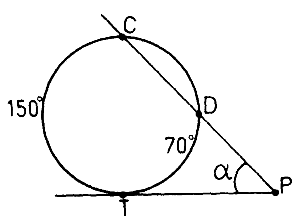
m) $\alpha = ?$



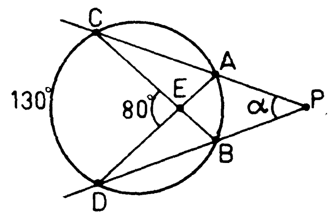
n) arco $QR = ?$



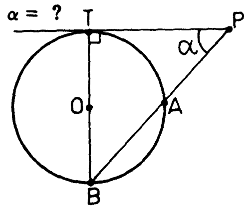
o) $\alpha = ?$



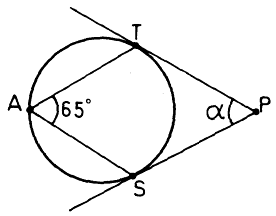
p) $\alpha = ?$



q) arco $AT = 80°$



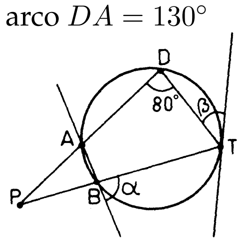
r) $\alpha = ?$



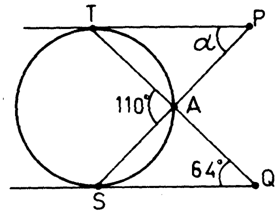
s) $\alpha = ?$,

$\beta = ?$,

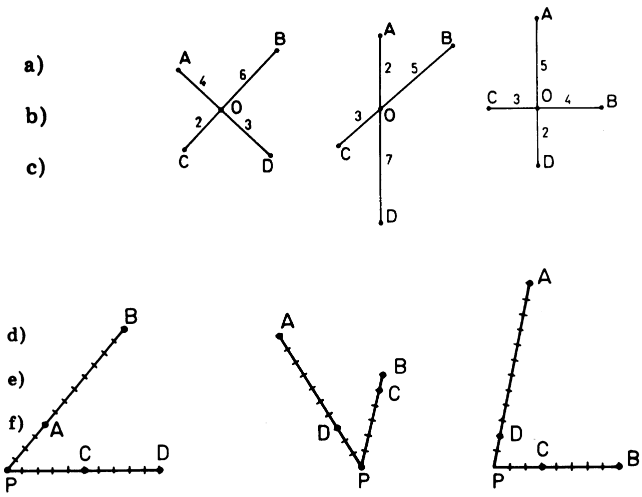
arco $DA = 130°$



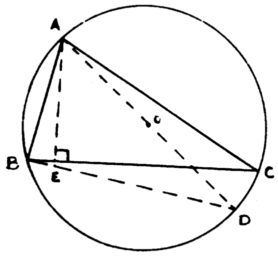
t) $\alpha = ?$



5. Diga si es verdadero o falso cada uno de los casos mencionados a continuación:
   a) Si un paralelogramo está inscrito en una circunferencia, debe ser un rectángulo.
   b) Si un ángulo inscrito y un ángulo central sub-tienden el mismo arco de circunferencia, deben ser iguales.
   c) El ángulo formado por dos cuerdas que se intersectan en un círculo es igual (en grados) a la semidiferencia de las medidas de los arcos intersectados.
   d) Los ángulos inscritos en el mismo arco de circunferencia son iguales.
   e) Una recta perpendicular a un radio es tangente a la circunferencia.
6. Demuestre que el lugar geométrico de los puntos P tales que $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 =$ constante, es una recta perpendicular a AB. (Use el teorema del coseno).
7. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia respecto a dos circunferencias? ¿Respecto a tres?
8. Diga en qué casos los puntos $ABCD$ están sobre una misma circunferencia.



9. Construir con regla y compás un triángulo del cual se conoce:
   a) Un lado, el ángulo opuesto y la mediana relativa a ese lado (el segmento que une el punto medio del lado con el vértice opuesto.)
   b) Un lado a, el ángulo opuesto A y la diferencia de los cuadrados de los otros dos lados $b^2 - c^2$. (Use el problema 6)
   c) Un lado a, el ángulo opuesto A y la altura h_b relativa al lado b.
10. Construir con regla y compás un cuadrilátero $ABCD$ del cual se sabe que es inscriptible y además se conoce la diagonal AC, el ángulo en B, y los lados AB y CD.
11. Pruebe que en todo triángulo, el producto de dos lados cualesquiera es igual al producto de la altura relativa al tercer lado por el diámetro de la circunferencia circunscrita.

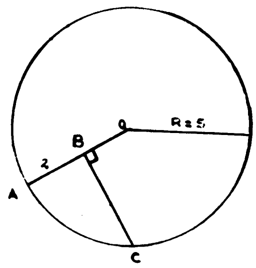


Solución: Compare los triángulos AEC y ABD.

12. Considere cuatro puntos distintos arbitrarios sobre una circunferencia A_1, A_2, A_3, A_4, y sean P_1, P_2, P_3, P_4, los puntos medios de los arcos A_1, A_2, A_2, A_3, A_3, A_4, A_4, A_5.

    Pruebe que $\overline{P_1P_3}$ es perpendicular al $\overline{P_2P_4}$.

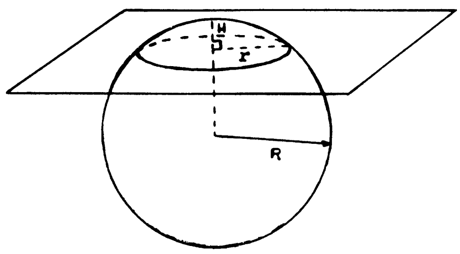
13. Dado el radio R y el segmento AB, determinar BC.



Respuesta: $BC = 4$

14. Se corta una esfera por un plano π como en la figura. Conociendo H y R determine r.

    Respuesta: $r = \sqrt{(2R - H)H}$



15. Dadas dos circunferencias de centros O y O' y de radios $R = 3$ y $R' = 6$ cm. Si $\overline{OO'} = 18$ cm. Calcule la longitud del segmento tangente a ambas circunferencias.

    Respuesta: $9\sqrt{3}$ y $\sqrt{315}$ (dos soluciones)

RESPUESTAS AL EJERCICIO No. 4.

a. $AB = 252°$ $BA = 108°$

b. $\alpha = 90°$ $BC = 300°$

c. $\alpha = 35°$

d. $\alpha = 20°$

e. $\alpha = 112°$, $\beta = 90°$

f. $\alpha = 35°$

g. $BD = 60°$

h. $\alpha = 120°$

i. $\alpha = 92^\circ$

j. $BD = 25^\circ$

k. $TC = 160^\circ$

l. $\alpha = 60^\circ$

m. $\alpha = 20^\circ$

n. $QR = 100^\circ$

o. $\alpha = 40^\circ$

p. $\alpha = 50^\circ$

q. $\alpha = 50^\circ$

r. $\alpha = 50^\circ$

s. $\beta = 35^\circ$, $\alpha = 80^\circ$

t. $\alpha = 86^\circ$

CAPíTULO 5

PROBLEMAS Y APLICACIONES

En esta guía vamos a dar algunas aplicaciones y problemas sobre lo que hemos estudiado hasta ahora.

MEDIDA DE LA TIERRA

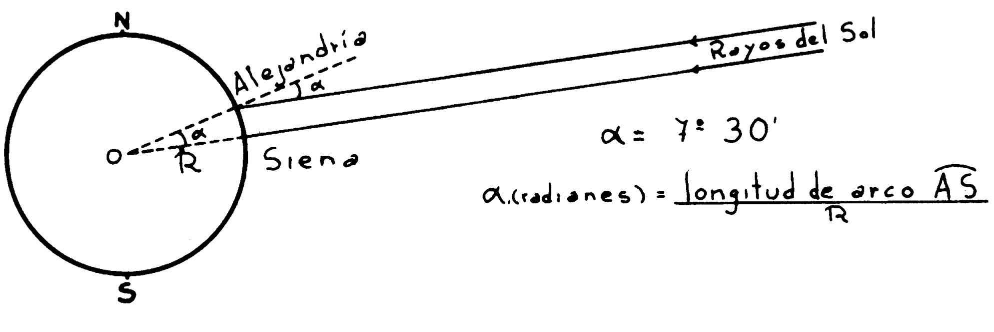
Pitágoras (532 a.C.) ya sabía que la Tierra era esférica, pero fue Eratóstenes (276-194 a.C.) quien logró medir por primera vez su radio. Veamos cómo lo hizo.

Eratóstenes vivía en Alejandría (Egipto) y supo que el día de solsticio de verano a mediodía el Sol se reflejaba en las aguas de un pozo profundo que había en la ciudad de Syena (actualmente Aswan). Concluyó que los rayos del Sol caían perpendicularmente a Syena ese día, entonces midió el ángulo de los rayos del Sol en Alejandría un día de solsticio de verano. Para medir este ángulo, midió una torre y su sombra, a mediodía y calculó el valor del ángulo: $7°30'$. (¿Puede usted decir cómo lo calculó?)

Eratóstenes suponía que Syena estaba directamente al sur de Alejandría, luego tenía la misma hora (consulte un Atlas y verá que esto no es completamente cierto).

Luego quiso medir la distancia de Alejandría a Syena, se informó de que una caravana hacía ese viaje en 50 días y calculó que la velocidad media de un camello es de 100 Estadios por día. Luego la distancia sería de 5000 Estadios (un estadio son 185 metros, la longitud del Estadio de los griegos). Con estos datos y considerando los rayos del Sol paralelos entre si, ya que el Sol está muy lejos, calculó el radio de la Tierra.

PROBLEMA No. 1. Calcule la longitud del radio de la Tierra que halló Eratóstenes.

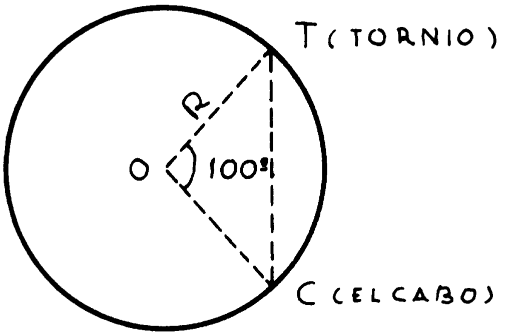


Respuesta: $R = 7066,48$ Km

Esta medida es mayor que el radio verdadero. Sin embargo, el razonamiento de Eratóstenes es correcto. Utilizando el mismo método, pero con instrumentos muy precisos se midió el radio de la Tierra del siguiente modo: se midió la distancia entre Tornio (Finlandia) y Ciudad del Cabo (Sur África), que están sobre el mismo meridiano y separados por un arco de $100°$. Conociendo el ángulo formado por los rayos del Sol en ambos lugares, el mismo día y a la misma hora, se determinó $R = 6378,26$ Km.

PROBLEMA No. 2. Halle la distancia rectilínea y la distancia sobre la superficie de la Tierra, que separa a Tornio de El Cabo.

Solución:



$$\begin{aligned} \alpha &= 100° \\ R &= 6378,26 \text{ Km} \end{aligned}$$

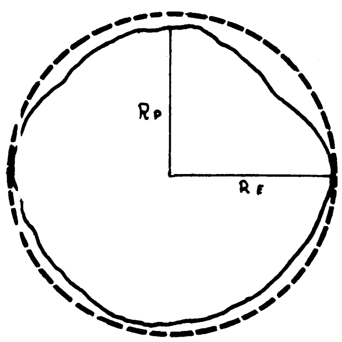
Respuesta: Longitud de arco $TC = 11132,16$ Km.

Distancia $\overline{TC} = 9772,06$ Km.

Sabemos que la Tierra no es exactamente esférica; tiene una forma bastante irregular, como la de la figura de abajo. Se ha medido con precisión, usando satélites artificiales, su forma exacta. Hoy día se aceptan las siguientes medidas.

Radio en los Polos $= 6356,76$ Km

Radio en el Ecuador $= 6378,16$ Km

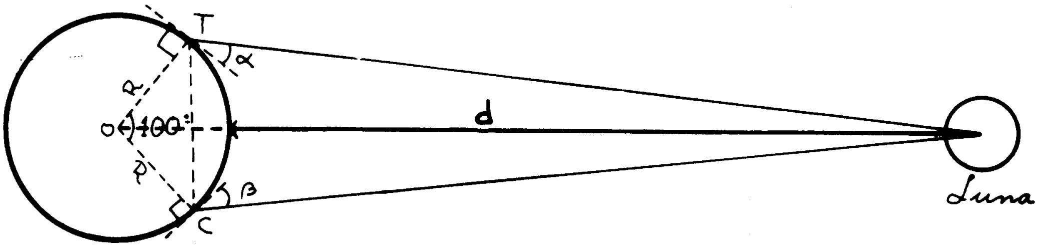


DISTANCIA DE LA TIERRA A LA LUNA

Ahora que conocemos el radio de la Tierra (suponiéndola esférica) podemos medir la distancia de la Tierra a la Luna.

Con la ayuda de un telescopio en Tornio podemos medir el ángulo que forma la Luna (o un cráter de la Luna cerca de su centro) con la dirección sur, llamémosla α. El mismo día y a la misma hora en Ciudad del Cabo un ayudante mide el ángulo β de la Luna con la dirección norte.

PROBLEMA No. 3. Calcule la distancia d, suponiendo conocidos los ángulos α y β.



Solución:

1. Con los datos que tiene puede calcular la distancia Tornio-El Cabo. ($R = 6378,26$ Km)
2. Del triángulo Tornio-El Cabo la Luna conoce un lado y los dos ángulos adyacentes: $\alpha + 50°$ y $\beta + 50°$ (¿por qué?). Entonces puede calcular la distancia Tornio-Luna (¿cómo lo hace?).
3. Del triángulo O-T-L conoce: R, $\overline{TL}$ y el ángulo comprendido (¿por qué?), puede calcular la distancia $\overline{OL}$ (¿cómo lo hace?).
4. Finalmente $d = OL - R$.

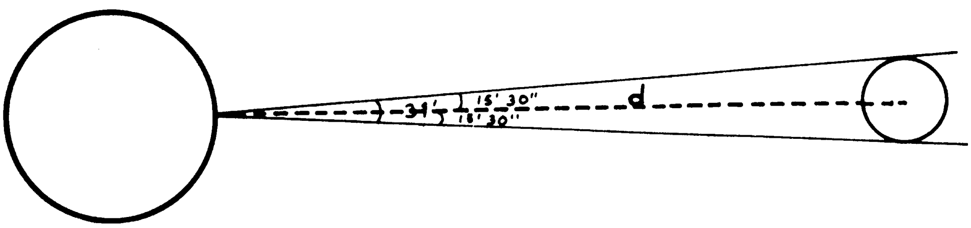
   Si conociéramos el valor exacto de los ángulos α y β obtendríamos $d = 384000$ Km aproximadamente, ya que la órbita de la Luna es elíptica, su distancia a la Tierra varía de 362025 Km hasta 406600 Km. El valor d es la distancia media.

RADIO DE LA LUNA

Si medimos con un telescopio el diámetro aparente (paralaje) de la Luna cuando ésta se encuentra cerca del Zenit en una noche muy clara para evitar la distorsión producida por la atmósfera, obtendremos un ángulo de $31'$.

PROBLEMA No. 4.

1. Calcule el radio de la Luna.



Respuesta: Aproximadamente 1670 Km.

2. ¿Con qué ángulo aparente (paralaje) vio Armstrong a la Tierra cuando estuvo de paseo por la Luna?

   Respuesta: Aproximadamente $1°52'30''$.

DISTANCIA DE LA TIERRA AL SOL

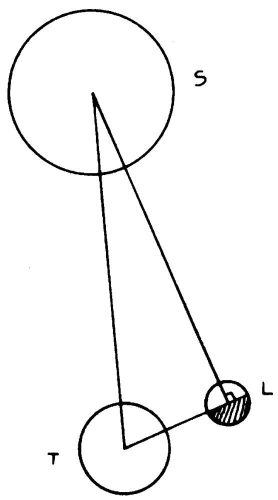
Aristarco de Samos (310-230 a.C.), fue el primero en medir las distancias de la Tierra al Sol y de la Tierra a la Luna. Como él murió 46 años antes del nacimiento de Eratóstenes, no conoció la medición del radio de la Tierra que hizo éste.

En realidad Aristarco dio estimaciones, comparando la distancia Tierra-Luna con el radio de la Tierra, aunque él no tenía una estimación de este radio. También estimó la distancia Tierra-Sol, comparándola con la distancia Tierra-Luna. Concretamente, él demostró que la distancia del Sol a la Tierra es mayor que dieciocho veces la distancia Tierra-Luna, pero menor que veinte veces esta misma distancia.

También dio estimaciones bastante precisas de las razones entre los radios del Sol, la Tierra y la Luna. Publicó este trabajo en un libro con el título *Sobre los tamaños y distancia del Sol y de la Luna* cuyo texto se conserva completo y está traducido al inglés en el libro *Aristarchus of Samos* de Sir Thomas Heath *(Oxford at the Clarendon Press)*, existente en la biblioteca de la U.S.B.

La medición de la distancia Tierra-Sol que hizo Aristarco se basa en que cuando la Luna está en cuarto creciente, el Sol ilumina la mitad de la Luna ya que sus rayos son casi paralelos entre si, porque está muy lejos, y además el ángulo Sol-Luna-Tierra es recto en la Luna.

PROBLEMA No. 5. Calcule la distancia ST sabiendo que el ángulo STL mide $89°51'12''$, cuando la Luna está en cuarto creciente.



Respuesta: 150000000 Km aproximadamente.

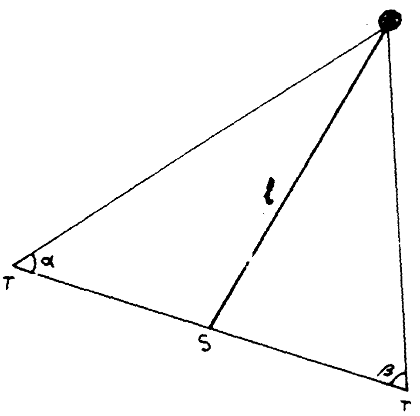
El trabajo de Aristarco es notable, por su rigor científico y por las escasas herramientas que él tuvo a su alcance. Además de no disponer de instrumentos de precisión, los griegos no conocían la trigonometría como nosotros la conocemos hoy día. Aristarco no trabajo con $\cos\alpha$, ni tenía tablas trigonométricas. Es muy instructivo leer, como diversión en ratos libres, parte de su libro.

La manera de medir ST en el problema anterior es en la práctica difícil porque el ángulo $\alpha = STL$ no se puede medir directamente. La distancia ST se ha medido, con métodos trigonométricos utilizando la órbita de Marte o del asteroide Eros. También se han medido las distancias ST y TL con técnicas no trigonométricas. Por ejemplo, TL se ha medido con mucha precisión haciendo rebotar un rayo Láser sobre un reflector dejado sobre la superficie de la Luna y midiendo el tiempo que tarda en recibirse el eco.

DISTANCIA DEL SOL A UNA ESTRELLA

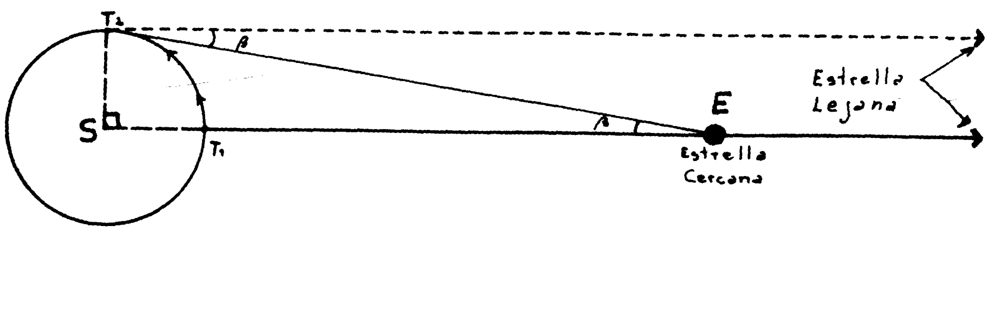
Conociendo la distancia $T-S$ podemos intentar medir la distancia del Sol a una Estrella. Suponiendo que la órbita de la Tierra es circular podemos medir el ángulo α un día. Luego, 6 meses después cuando la Tierra está en el extremo opuesto del diámetro, medimos el ángulo β.

Aunque el diámetro de la órbita de la Tierra es muy grande, resulta pequeño comparado con la distancia a una estrella, los ángulos α y β serán casi iguales, necesitaremos instrumentos muy finos.



PROBLEMA No. 6. Haga los cálculos teóricos necesarios para calcular la distancia ℓ.

Frecuentemente se usa también el método ilustrado en la figura, llamado Paralaje Heliocéntrico.



Cuando la Tierra esta en la posición T_1 se observa la estrella que se quiere medir, E y se toma como referencia una estrella más lejana D que esté en la misma dirección de E. Cuando la Tierra esta en la posición T_2 se mide el ángulo β que forma las direcciones de D y de E. Entonces se puede resolver el triángulo rectángulo T_2SE.

Como las distancias astronómicas son muy grandes hay que usar unidades de distancias muy grandes también.

Las Unidades más frecuentes son:

1. Unidad Astronómica, es la distancia TS =150000000 Km.
2. Año Luz, es la distancia que recorre la luz en un año.
   (la velocidad de la luz 300000 Km/seg).
3. Parsec, es la distancia a la cual se encontraría una estrella hipotética si el ángulo β de la figura anterior fuese 1 segundo.

PROBLEMA No. 7.

1. Calcule el valor de 1 Parsec en Kilómetros.
   Respuesta: $= 30,36 \times 10^{12}$ Km
2. La estrella más cercana al Sol se llama α-Centauro. Sabiendo que el ángulo β correspondiente a esta estrella es 0,762 segundos, calcule la distancia de α-Centauro al Sol en Parsec.

Respuesta: 1,31 Parsec

BIBLIOGRAFíA

1. Dixon *Dynamical Astronomy* Prentice Hall.
2. Heath *Aristarchus of Samos* Oxford U. Press.

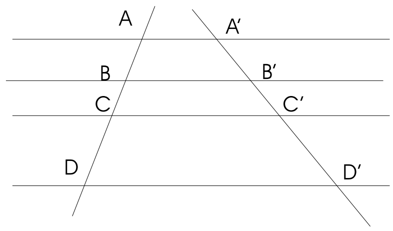
AUTOEVALUACIÓN

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA-1511—Autoevaluación de los capítulos 1 al 5—

Sus respuestas las puede verificar en el Apéndice, en la página 344.

1. En la figura se muestra un sistema de rectas paralelas horizontales y dos rectas oblicuas, así como los puntos de intersección.



Diga cual de las siguientes igualdades **no es cierta** en general:

A | $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$

B | $\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'D'}}$

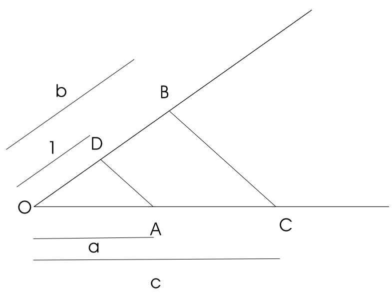
C | $\frac{\overline{AA'}}{\overline{CC'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$

D | $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'D'}}$

E | $\frac{\overline{AB}-\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}-\overline{B'D'}}{\overline{C'D'}}$

F | ¡Ninguna!

2. En la figura se presentan los segmentos: $\overline{OD}$, $\overline{OB}$, $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$, que miden 1, b, a y c respectivamente. Además $\overline{DA}$ es paralelo $\overline{BD}$.



Entonces **la medida** c es igual a:

A | $a+b$

B | $b+1$

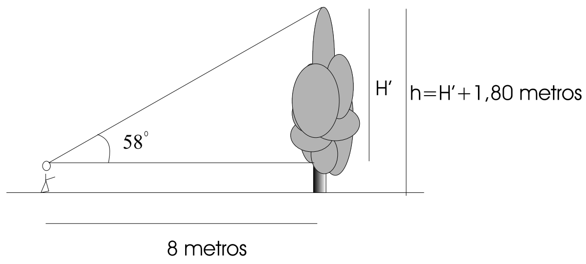
C | a/b

D | $a.b$

E | $(a/b)+1$

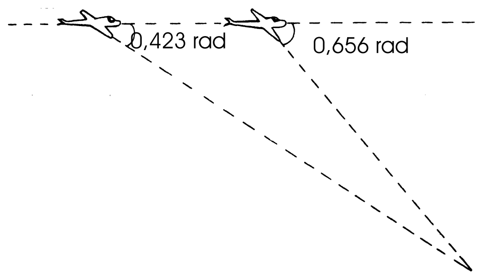
F | ¡Ninguna!

3. Una persona de 1,80 metros de estatura desea medir la altura h de un árbol sabiendo que a una distancia de 8 metros el extremo superior se observa bajo un ángulo de $58°$ respecto a la horizontal. Entonces **la altura** h medida en metros está en el intervalo:



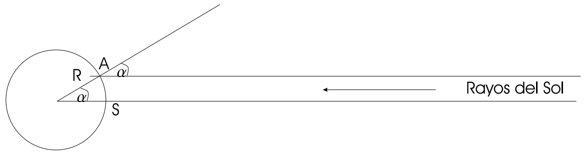
A $(10,5;11,5]$	B $(11,5;13,5]$	C $(13,5;15,5]$	D $(15,5;18,5]$
E $(18,5;20,5]$	F ¡Ninguna!		

4. El piloto de un avión observa que el ángulo de depresión de una luz situada exactamente bajo su línea de vuelo es de $0,423$ radianes. Dos minutos más tarde el ángulo de depresión es de $0,656$ radianes. Si está volando horizontalmente y siguiendo una línea recta a 240 Km/h., entonces **la altura de vuelo** expresada en kilómetros está en el intervalo:



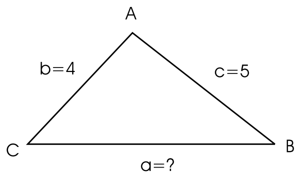
A $(3,25;4,00]$	B $4,00;4,75]$	C $(4,75;5,25]$	D $(5,25;6,75]$
E $(7,75;9,75]$	F ¡Ninguna!		

5. Desde un punto S en la superficie de un planeta caen los rayos solares perpendicularmente sobre la superficie. Desde otro punto A en la superficie del planeta los rayos solares caen formando un ángulo $\alpha = 2°$. La longitud del arco SA es 300 Km. Entonces **el radio** R (medido en kilómetros) de ese planeta está en el intervalo:



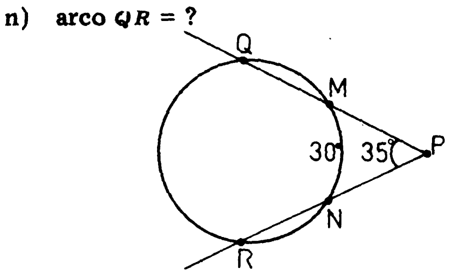
A	$(4000; 6500]$	B	$(6500; 7000]$	C	$(7000; 7500]$	D	$(7500; 9500]$
E	$(9500; 15500]$	F	¡Ninguna!				

6. En un triángulo ABC, el ángulo en A es el doble del ángulo en B. Si $b = 4$ y $c = 5$, calcule **el lado** a.



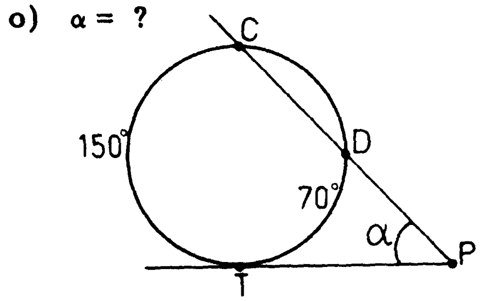
A	$a = 6$	B	$a = 7$	C	$a = 8$	D	$a = 9$	E	$a = 10$	F	¡Ninguna!

7. El círculo de la figura tiene radio r. El arco NM (sentido antihorario) abarca un ángulo al centro de $30°$, y el ángulo en P es $35°$. Halle **la longitud del arco** QR (sentido antihorario) en términos de r.



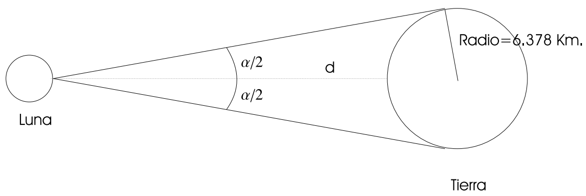
A	$2\pi r/9$	B	$2\pi r/5$	C	$5\pi r/7$	D	$9\pi r/7$	E	$5\pi r/9$	F	¡Ninguna!

8. El círculo de la figura tiene radio r. Los arcos TD y CT (sentido antihorario) abarcan ángulos al centro de $70°$ y $150°$ respectivamente. Halle la medida del **ángulo** α.



A	85°	B	80°	C	50°	D	45°	E	40°	F	¡Ninguna!

9. Suponga que un astronauta ve la Tierra desde la superficie de la Luna abarcando un ángulo aparente $\alpha = 1° \, 53'$. Suponga también que el radio de la Tierra es de $6{,}378$ kilómetros. Sea d la distancia entre la superficie de la Luna y la superficie de la Tierra que se puede hallar con esos datos. Entonces **la distancia** d (medida en miles de kilómetros) está en el intervalo:



A	$(370; 385]$	B	$(385; 405]$	C	$(405; 410]$	D	$(410; 415]$	E	$(415; 425]$	F	¡Ninguna!

10. Una grua tiene un brazo de 15 metros de largo. El extremo del brazo se eleva h metros cuando su ángulo de elevación (respecto a la horizontal) cambia de $15°$ a $45°$. Entonces **la distancia** h está en el intervalo:

A	$(6{,}50; 6{,}75]$	B	$(6{,}75; 7{,}00]$	C	$(7{,}00; 7{,}25]$	D	$(7{,}25; 7{,}50]$	E	$(7{,}50; 7{,}75]$	F	¡Ninguna!

CAPíTULO 6

CONCEPTOS BÁSICOS EN EL ESPACIO

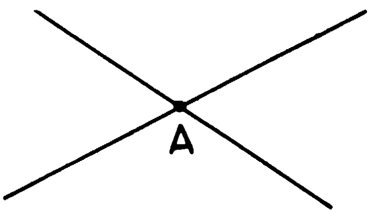
INTRODUCCIÓN

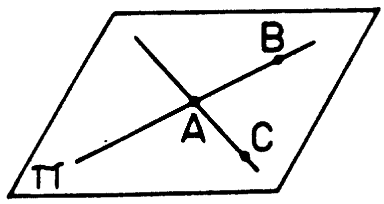
El propósito de esta guía es desarrollar de manera intuitiva algunos conceptos básicos en el espacio. Concretamente, primero hablaremos de relaciones de incidencia y paralelismo entre rectas, planos y puntos del espacio y luego sobre la idea de ángulo.

En este curso de Geometría MA1511, se ha adoptado un punto de vista puramente intuitivo. Desde el punto de vista lógico, la Geometría se desarrolla a partir de ciertos axiomas que son verdades intuitivamente obvias, o que aceptamos como obvias, y cualquier otra proposición debe ser demostrada a partir de esos axiomas. Algunas de las proposiciones que mencionamos aquí pueden ser tomadas como axiomas y otras como teoremas, al estudiante interesado en el desarrollo lógico y formal de la Geometría le recomendamos el libro de P. Puig Adam: *Geometría Métrica,* Tomo 1.

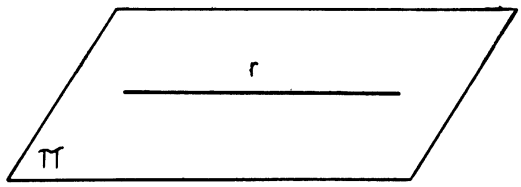
Las relaciones de incidencia y paralelismo que mencionamos arriba son relaciones del tipo: “estar en”, “pasar por”, “cortar”, “es paralelo a”, etc. Algunos ejemplos son los siguientes:

1. Por dos puntos distintos del espacio pasa una única recta.
2. Por tres puntos distintos del espacio pasa un plano único.
3. Si dos puntos de una recta están en un plano toda la recta está contenida en ese plano.
4. Dos rectas que se cortan en el espacio determinan un plano único. Esta proposición puede ser deducida de (2.) y (3.) como un teorema, ya que si tenemos dos rectas que se cortan en A, tomamos dos puntos B y C en cada una de ellas, distintos de A. Entonces por (2.) existe un plano único, π, que pasa por A, B y C. Por (3.) este plano contiene a la recta que pasa por A y B y a la recta que pasa por A y C.

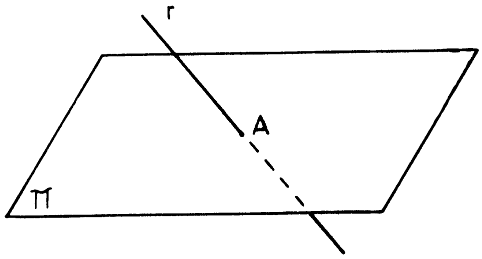




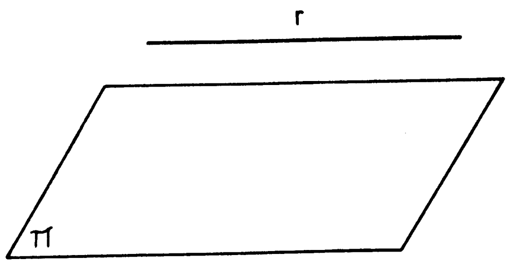
5. Una recta r y un plano π pueden ocupar una de las siguientes posiciones relativas
   a) r está contenida en π



b) r corta a π en un único punto



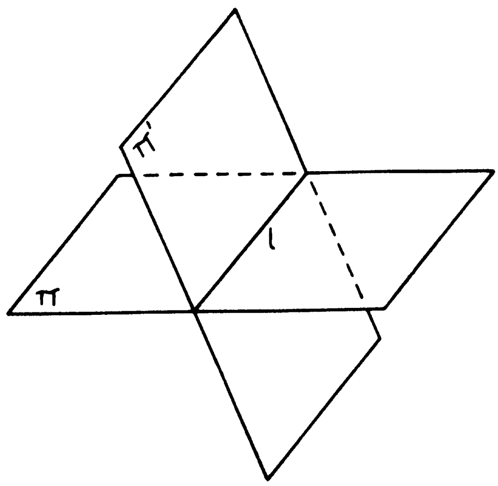
c) r no corta a π



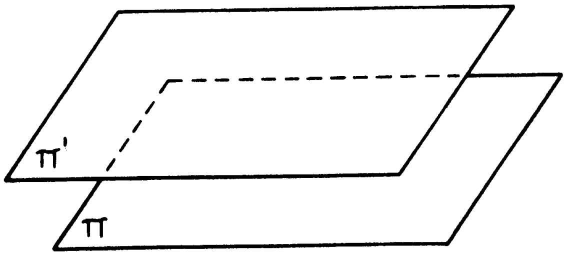
En este último caso decimos que r es *paralela* a π.

6. Dos planos distintos en el espacio π y π' pueden ocupar una de las siguientes posiciones relativas

   a) π y π' se cortan según una recta ℓ.

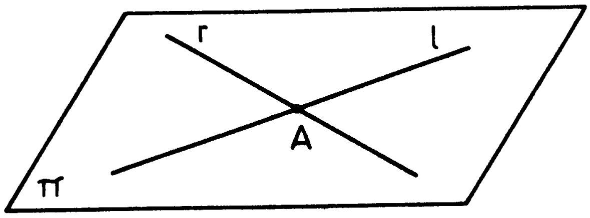


   b) π y π' no se cortan nunca. En este caso decimos que son paralelos.

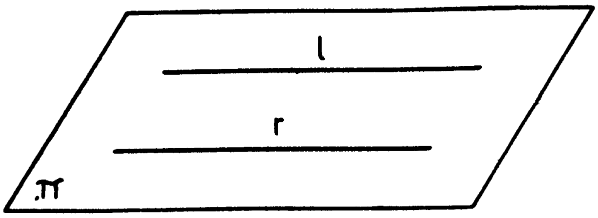


7. Dos rectas distintas ℓ y r en el espacio pueden ocupar una de las siguientes posiciones relativas:

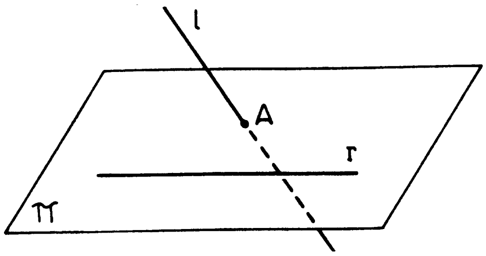
   a) r y ℓ se cortan en un punto. En este caso son coplanarias: están en un plano π.

   b) r y ℓ están en un mismo plano π y no se cortan. En este caso decimos que son *paralelas.*

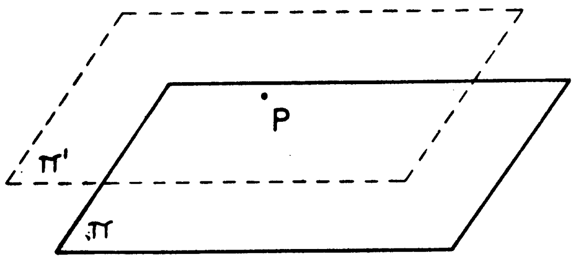
   

   c) r y ℓ no se cortan y no hay ningún plano que las contenga.

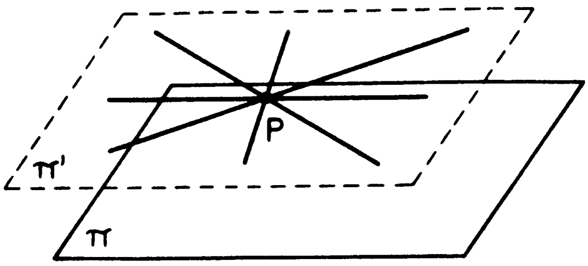
   

   En este caso decimos que se cruzan.

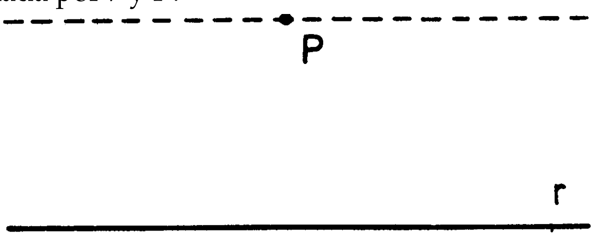
8. *a*) Por un punto P exterior a un plano π se pueden trazar un único plano π' paralelo a π.

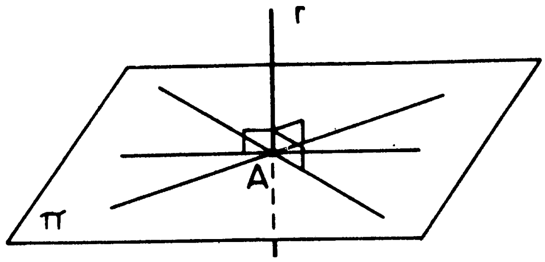
   b) Por un punto P exterior a un plano π se pueden trazar infinitas rectas paralelas a π, todas ellas estarán contenidas en π'.



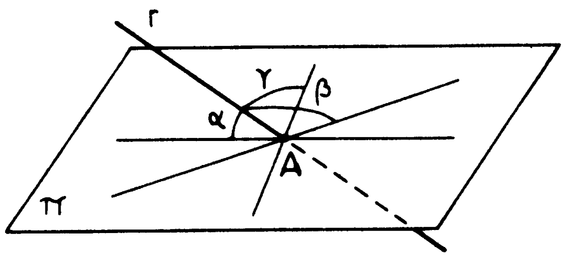
c) Por un punto P exterior a una recta r se puede trazar una paralela única. Esa paralela estará en el plano determinada por r y P.



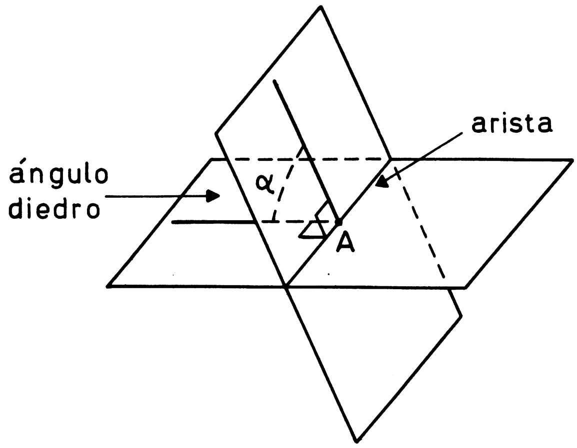
Hablemos ahora de ángulos en el espacio. Un caso particular, pero muy intuitivo es la perpendicularidad: diremos que una recta r que corta a un plano π en un punto A es perpendicular al plano, si lo es a todas las rectas de π que pasan por A.



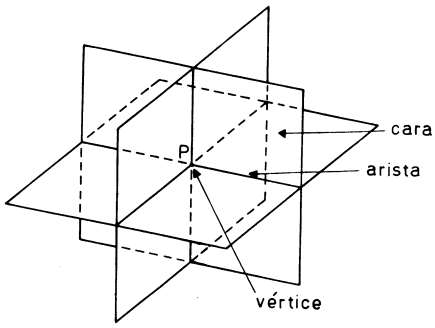
Si la recta r no es perpendicular a π formará ángulos distintos con cada recta de π que pase por A. No es claro lo que llamaríamos ángulo en este caso, vamos a convenir que el ángulo de la recta r y el plano π es el menor de todos estos ángulos. En la figura de abajo, α será el ángulo de r y π .



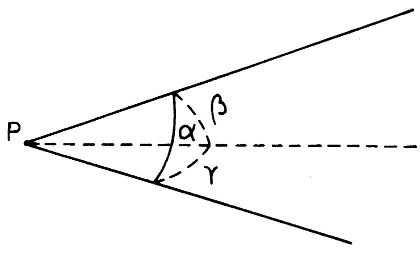
Dos planos que se cortan dividen al espacio en cuatro regiones llamadas ángulos diedros. La idea de ángulo es bien clara en este caso. La medida de este ángulo es la medida del ángulo que forman dos rectas perpendiculares a la arista por un mismo punto y situadas en cada uno de los planos.



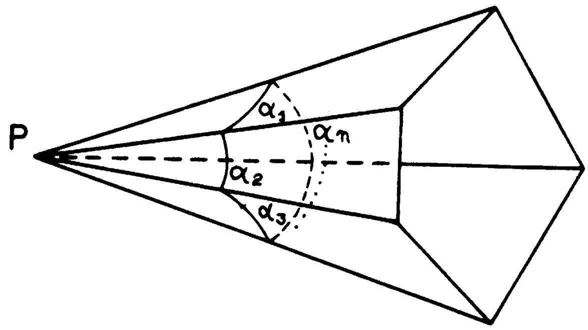
Si tenemos un ángulo diedro y trazamos un tercer plano que corte a la arista en un punto P dividimos al espacio en 8 regiones, cada una se llama *angulo triedro*, las rectas intersección de los planos se llaman *aristas*, el punto *p vértice* y los planos se llaman *lados* o *caras* del ángulo triedro.



La idea del ángulo también es clara aquí, sin embargo no podemos dar un número que sea su medida. Podemos medir cada uno de los ángulos formados por las aristas, daremos la medida de un triedro por tres ángulos que son los ángulos α, β, γ de sus caras



Igualmente, podemos hablar de *ángulo poliedro:* es una de las regiones del espacio determinadas por varios planos que se cortan en un punto P (vértice). Las rectas de intersección de dos de ellos se cortan también en P.



Podemos medir cada uno de los ángulos de las caras $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

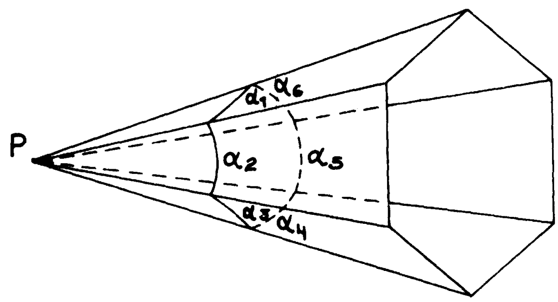
* * *

Hasta ahora hemos enunciado proposiciones y conceptos que son más o menos obvios intuitivamente, por eso no nos hemos preocupado mucho en demostrarlos o justificarlos. Vamos ahora a probar dos teoremas referentes a relaciones métricas en los ángulos poliedros, relaciones entre las medidas de los ángulos poliedros.

Hagamos un paréntesis para decir lo que significa probar un teorema: Se tiene una conjetura, algo que se cree que puede ser cierto, entonces a partir de proposiciones que sabemos que son ciertas, porque ya las hemos demostrado (otros teoremas), o que tomamos por ciertas desde el principio (Axiomas) y utilizando métodos deductivos debemos llegar a que nuestra hipótesis original también es cierta.

Enunciemos ahora el primer teorema:

TEOREMA 7. *En todo ángulo poliedro, el ángulo de una cualquiera de las caras es menor que la suma de los demás*



$$\alpha_1 < \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$$

Hagamos otro paréntesis sobre el método de demostración:

Observe que el teorema se refiere a cualquier ángulo poliedro, cualquiera que sea el número de sus caras. Podríamos pensar esto como una sucesión de teoremas: En todo triedro, el ángulo de una cara es menor que la suma de los otros dos. En todo ángulo poliedro de cuatro caras, el ángulo de una de ellas es menor que la suma de los otros tres. En todo ángulo poliedro de 5 caras,..., etc., etc.

Este tipo de teorema se presta a ser probado por el llamado principio de Inducción: supongamos que tenemos una proposición que depende de un número entero. Podemos pensarla como una sucesión de proposiciones ordenadas igual que los números enteros, y queremos probar que es verdadera cualquiera que sea el número entero. En nuestro caso el número entero es el número de caras del ángulo poliedro.

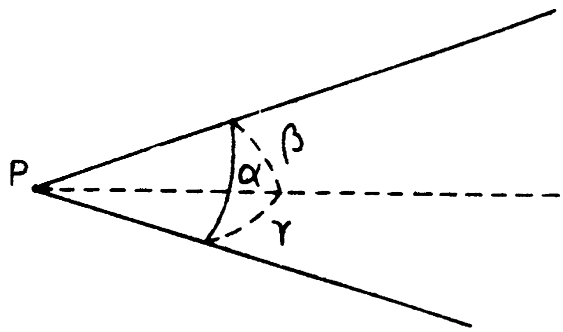
Un método de probarlo es el siguiente:

a. Probamos que la proposición es verdadera para un entero fijo k.
b. Probamos que *si* la proposición es cierta para un entero cualquiera n, también es cierta para el entero siguiente $n+1$.

Entonces la proposición *es cierta* para todo entero $\geq k$, ya que por (a) es cierta para k, por (b) es cierta para $k+1$. Por (b) de nuevo, es cierta para $k+2$, etc.

En nuestro teorema el entero k será 3, que corresponde al caso del triedro, vale la pena enunciar esto como un teorema aparte. Aquí termina el paréntesis.

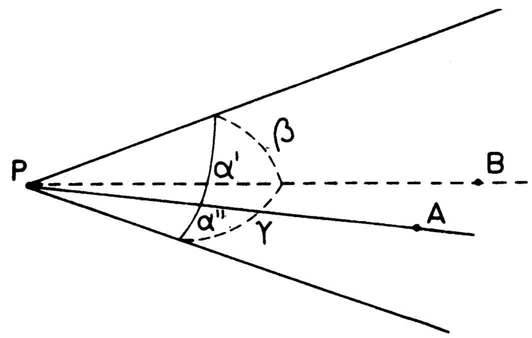
TEOREMA 8. *En todo triedro el ángulo de una cara cualquiera es menor que la suma de los otros dos; es decir:*



$$\begin{aligned} \alpha &< \beta+\gamma \\ \beta &< \alpha+\gamma \\ \gamma &< \alpha+\beta \end{aligned}$$

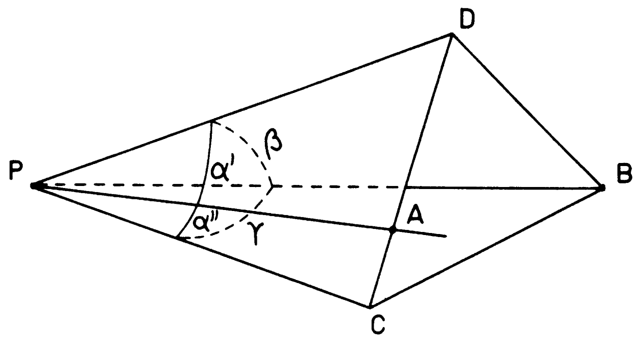
Demostración: Primero supongamos que el triedro tiene dos ángulos iguales, mayores o iguales que el tercero. Por ejemplo: $\alpha = \beta \geq \gamma$. En este caso el teorema es obvio.

Supongamos ahora que hay un ángulo mayor que los otros dos. Por ejemplo $\alpha > \gamma$ y $\alpha > \beta$. Es obvio que $\alpha+\gamma > \beta$ y $\alpha+\beta > \gamma$, falta ver que $\beta+\gamma > \alpha$. Para esto tracemos la recta PA de manera que divida el ángulo α en dos ángulos α' y α'' y que α' sea igual a β.



Vamos a probar que $\alpha'' < \gamma$. Tomemos segmentos $\overline{PA} = \overline{PB}$ como en la figura.

Ahora tracemos los segmentos BD y DC como en la figura. $\Delta PAD = \Delta PBD$, porque: $\alpha' = \beta$, $\overline{PA} = \overline{PB}$ y $\overline{PD}$ es común, luego $\overline{DA} = \overline{DB}$. Fijémonos en el triángulo DBC. Como en todo triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos: $\overline{DC} < \overline{DB} + \overline{BC}$, o sea, $\overline{DA} + \overline{AC} < \overline{DB} + \overline{BC}$ y como $\overline{DA} = \overline{DB}$ tenemos $\overline{AC} < \overline{BC}$.



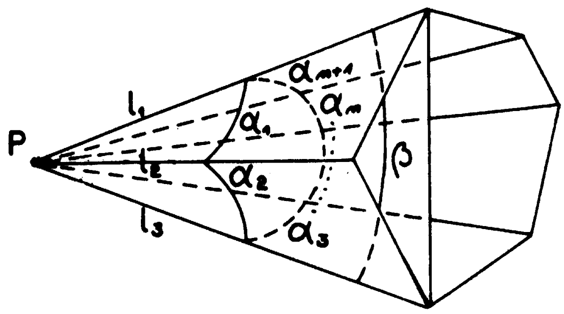
Compare ahora los triángulos ΔPCA y ΔPCB : el lado $\overline{PC}$ es común, $\overline{PA} = \overline{PB}$, pero $\overline{AC} < \overline{BC}$ luego $\alpha'' < \gamma$. ($\overline{AC}^2 < \overline{BC}^2$ usa el valor del coseno)

Esto, junto con $\alpha' = \beta$, nos da

$$\alpha = \alpha' + \alpha'' < \beta + \gamma$$

Demostración del Teorema No. 7. Acabamos de probar la parte (a) del principio de inducción. Debemos probar ahora la parte (b):

Si en todo ángulo poliedro de n caras, el ángulo de una cualquiera de ellas es menor que la suma de los demás, *entonces* ocurre lo mismo en todo poliedro de $n+1$ caras. Lo que debemos probar es ese *entonces.*



Supongamos que tenemos un ángulo poliedro de $n+1$ caras. Consideremos tres aristas consecutivas, ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Las aristas ℓ_1 y ℓ_3 determinan un plano diagonal que divide al ángulo poliedro en dos: un triedro y un ángulo poliedro de n caras, donde los ángulos α_1 y α_2 fueron reemplazados por el ángulo β que forman las aristas ℓ_1 y ℓ_3. En el triedro tenemos que $\alpha_1 < \alpha_2 + \beta$. Como el ángulo poliedro que queda tiene n caras, nuestra hipótesis de inducción dice que $\beta < \alpha_3 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_{n+1}$, entonces: $\alpha_1 < \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n+1}$.

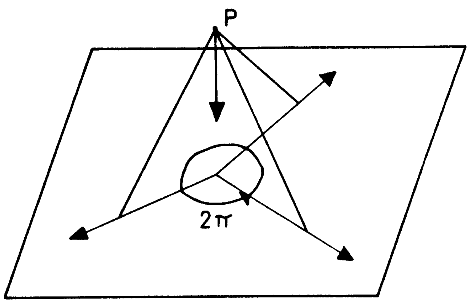
Con lo cual termina la demostración.

* * *

El otro teorema que vamos a demostrar también trata de relaciones métricas en los ángulos poliedros y también usaremos el principio de inducción.

TEOREMA 9. *En todo ángulo poliedro la suma de los ángulos de sus caras es siempre menor que* 2π.

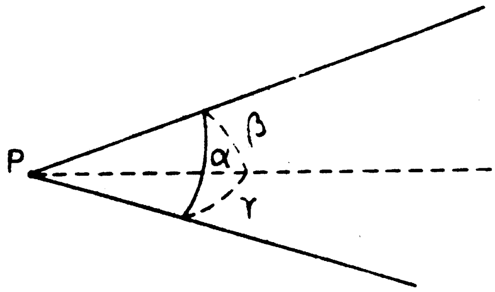
Intuitivamente se comprende mucho más fácilmente, ya que si imaginamos el ángulo poliedro formado por varillas móviles unidas en P y lo colocamos sobre una mesa, podemos imaginar que haciendo presión sobre P el poliedro "se aplasta" de manera que sus ángulos van creciendo hasta aplastarlo completamente, en cuyo caso los ángulos suman 2π exactamente.



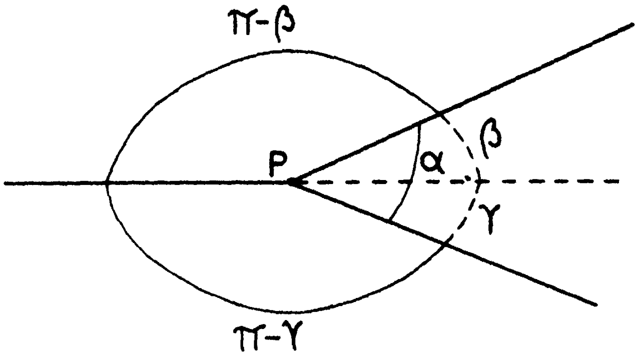
Veamos la demostración:

Primero debemos probarlo para el número de caras más pequeño posible, 3. Vamos a enunciarlo como un teorema.

TEOREMA 10. *En todo ángulo triedro* $\alpha+\beta+\gamma<2\pi$



Demostación: Prolonguemos una de las aristas y aplicamos el Teorema 7 al triedro que resulta: $\alpha<(\pi-\gamma)+(\pi-\beta)$.

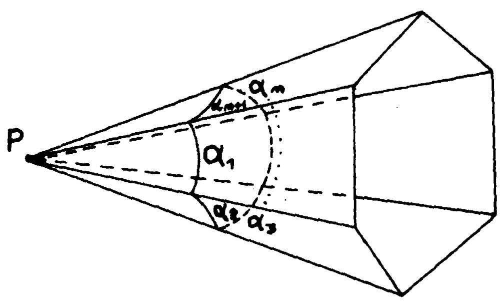


Entonces: $\alpha+\beta+\gamma<2\pi$

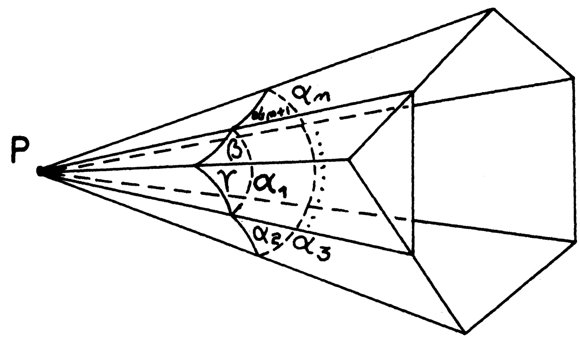
Prueba del teorema 9. Ya tenemos la parte (*a*) del principio de inducción, debemos probar la parte (*b*):

Si en todo ángulo poliedro de n caras la suma de los ángulos de las caras es menor que 2π, *entonces* en todo ángulo poliedro de $n+1$ caras la suma de los ángulos de las caras es también menor que 2π.

Consideremos un ángulo poliedro de $n+1$ caras



Prolonguemos las caras α_{n+1} y α_2 hasta cortarse en una recta (esto siempre ocurre ya que dos planos que se cortan en un punto deben cortarse en una recta que contiene a ese punto).



Se forma así un ángulo poliedro de n caras, entonces por la hipótesis de inducción:

$$(\gamma + \alpha_2) + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n + (\alpha_{n+1} + \beta) < 2\pi$$

o sea

$$\beta + \gamma + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n+1} < 2\pi$$

Pero por el teorema 1 tenemos que $\alpha_1 < \beta + \gamma$ en el pequeño triedro que se formó, luego:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n+1} < 2\pi$$

BIBLIOGRAFÍA

1. Desarrollo en forma axiomática de la. Geometría: ver **Puig Adam,** *Geometría Métrica,* Tomo 1.

   El material está diseminado en todo el libro, ver particularmente la introducción y el primer capítulo.
2. Propiedades métricas del ángulo poliedro: ver **Puig Adam,** Lección No. 44.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. ¿Cuántas rectas determinan n puntos no alineados tres a tres? R: $\binom{n}{2}$
2. ¿Cuántos planos determinan n puntos no coplanarios de cuatro en cuatro? R: $\binom{n}{3}$
3. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos P del espacio que están a la misma distancia de dos puntos fijos A y B? R= Un plano
4. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos P del espacio tales que $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2$ = constante, A y B puntos fijo. en el espacio? R= Un plano perpendicular a $\overline{AB}$
5. ¿Cuál es el lugar geométrico de todas las rectas del espacio que cortan a una recta r en un punto A formando un ángulo α? R: Un cono de vértice A y eje r

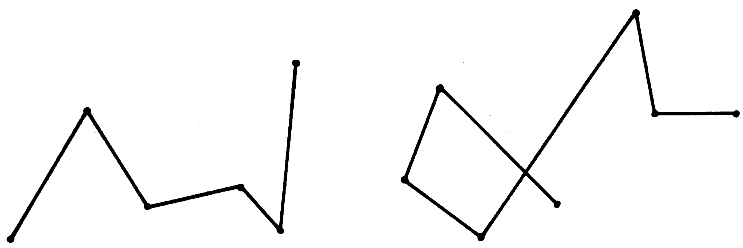
6. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos P del espacio desde los cuales se ve un segmento dado AB bajo un ángulo α? R: Un Toroide

   (Use el problema anterior y la construcción del arco capaz).
7. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los lados de un ángulo diedro? ¿Cómo debe llamarse ese lugar? R: Plano bisector.
8. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de las aristas de un ángulo triedro? ¿Cómo debería llamarse ese lugar?
9. Pruebe que si se proyecta un punto P del espacio perpendicular sobre las caras de un diedro (esto es, si se trazan perpendiculares por P a las caras del diedro) y luego se trazan perpendiculares por las proyecciones a la arista del diedro, estas dos se cortan en un punto de la arista.
10. Pruebe que dos ángulos diedros que tienen aristas paralelas y caras perpendiculares dos a dos son iguales o suplementarios.
11. Pruebe que en todo ángulo triedro los planos bisectores de sus ángulos diedros se cortan en una misma recta.
12. Pruebe que en todo ángulo triedro los planos trazados perpendicularmente a las caras por las bisectrices de estas caras, se cortan en una misma recta.
13. Cortar un ángulo poliedro de cuatro caras por un plano, de manera que la sección sea un paralelogramo.
14. Pruebe que en todo ángulo poliedro convexo de n caras la suma de sus ángulos diedros está comprendida entre $n\pi$ y $(n-2)\pi$.

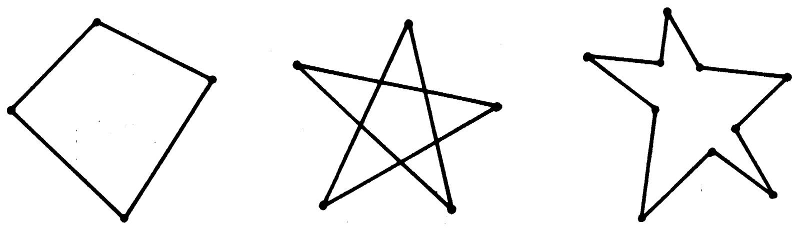
CAPíTULO 7

POLÍGONOS Y POLIEDROS

Definiciones. Uniendo puntos del plano mediante segmentos de rectas consecutivas obtenemos una figura que se llama *línea poligonal.*

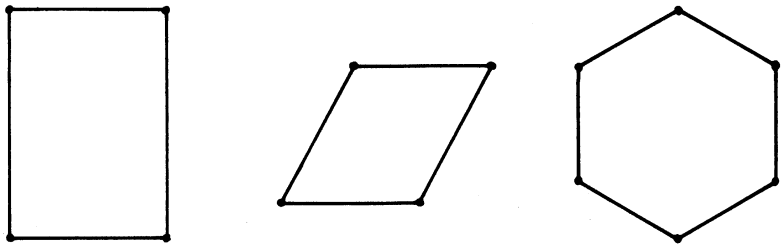


Cuando la línea poligonal es cerrada, o sea cuando el punto inicial del primer segmento coincide con el punto final del último, la figura se llama *polígono.*

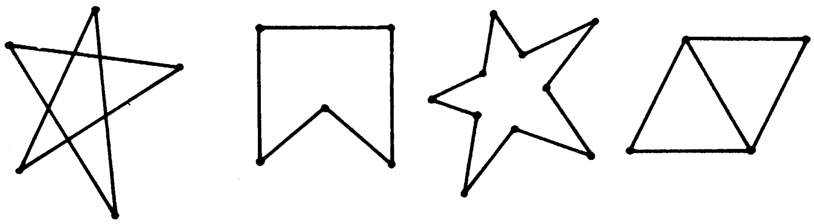


Los puntos de llaman *vértices* y los segmentos se llaman *lados* del polígono.

Un polígono se dice *convexo* si cada lado deja en un mismo semiplano a los demás.



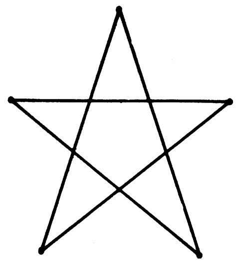
Convexos



No convexos

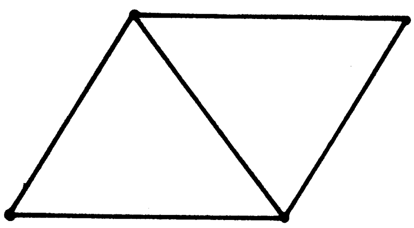
Como cada lado de un polígono convexo deja en un mismo semiplano a los demás, podemos definir el *interior de un polígono convexo* como la intersección de todos esos semiplanos. Entonces el segmento que une dos puntos interiores está totalmente contenido en el interior.

La definición de interior no tiene sentido si el polígono no es convexo, por ejemplo: ¿cuál seria el interior de esta estrella? Escriba usted mismo una definición de interior que resulte en este caso:



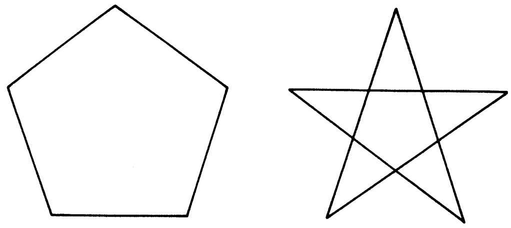
Otra propiedad interesante de los polígonos convexos es que el número de sus vértices es siempre igual al número de sus lados.

Sin embargo, esta propiedad no es característica de los polígonos convexos, las estrellas anteriores también tienen el mismo número de lados y de vértices, 5 en el primer caso, 10 en el segundo. Pero este polígono tiene 5 lados y 4 vértices.



Una clase importante de polígonos son los *polígonos regulares*, aquellos que tienen todos sus lados y todos sus ángulos iguales.

Estos dos pentágonos son regulares, uno es convexo y el otro estrellado.

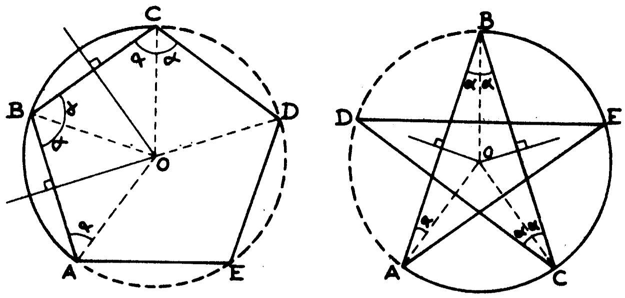


* * *

En la Guía No. 4 vimos que todo triángulo es inscriptible en una circunferencia. También dimos condiciones para que un cuadrilátero sea inscriptible. Vamos a ver que cualquier polígono regular tiene esta propiedad.

TEOREMA 11. *Todo polígono regular es inscriptible en una circunferencia.*

Demostración. Tracemos las mediatrices de dos lados consecutivos. Se cortan en un punto O. Tracemos la circunferencia de centro O que pasa por AB y C. Hay que probar que esa circunferencia también pasa por D, o sea que: $\overline{OC} = \overline{OD}$.



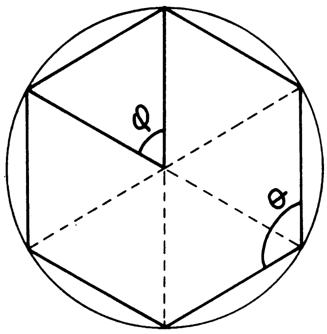
El ángulo α es la mitad del ángulo ABC (¿por qué?). Luego $\Delta OBC = \Delta OCD$.

De allí resulta: $\overline{OC} = \overline{OD}$, luego la circunferencia Pasa también por D. Del mismo modo se ve que la circunferencia pasa por E.

El razonamiento sería similar en el caso de cualquier otro polígono regular.

* * *

De este resultado deducimos que el ángulo central φ de un polígono regular convexo de n lados es $\varphi = \dfrac{2\pi}{n}$



Y el ángulo θ del mismo polígono es $\theta = \dfrac{2\pi - 2\varphi}{2} = \pi - \varphi$.
(¿Por qué?). Entonces $\theta = \pi - \dfrac{2\pi}{n}$.

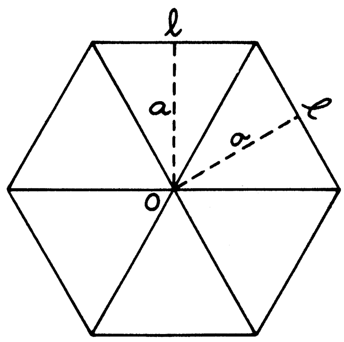
Ejemplos: El ángulo del triángulo equilátero es de $60°$, el del cuadrado es $90°$, el del pentágono $108°$, el del exágono de $120°$, etcétera.

* * *

¿cómo hallar el área de un polígono regular convexo de n lados?

Por lo que acabamos de ver, podemos descomponer el polígono en n triángulos isósceles iguales. Cada uno de ellos tiene área $= \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$, entonces el área del polígono es

$$\text{Area } = \frac{n \cdot \ell \cdot a}{2}$$



* * *

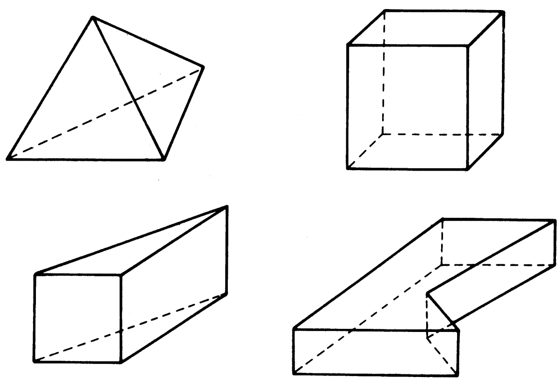
Las figuras en el espacio análogas a los polígonos son los poliedros. Estos son cuerpos cerrados formados pegando polígonos por sus lados, concretamente:

Definición: Un poliedro es el conjunto del espacio formado por un número finito de polígonos de manera que:

1. Cada lado de un polígono sea además el lado de otro polígono y sólo de ese.
2. Dos polígonos adyacentes no están en el mismo plano.

Los polígonos se llaman *caras* del poliedro, sus lados se llaman *aristas* y sus vértices se llaman *vértices del poliedro.*

Ejemplos:

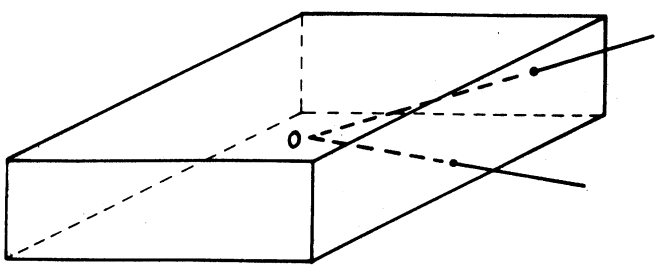


Un poliedro es *convexo* si el plano de cada cara deja en un mismo semiespacio a las demás. El interior de un poliedro convexo es la intersección de todos esos semiespacios.

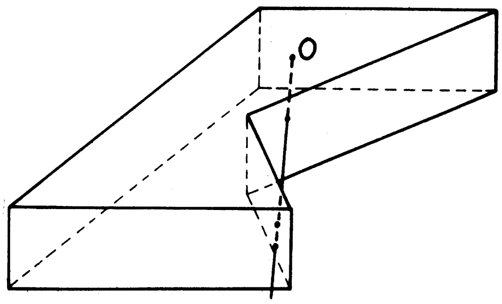
Los tres primeros ejemplos de arriba son convexos, el cuarto no lo es.

En todo poliedro convexo el segmento que une a dos puntos interiores está totalmente contenido en el interior (¿por qué?).

De esto último resulta que si O es un punto interior a un poliedro convexo, las semirrectas que parten de O cortan a la superficie del poliedro en un punto único.



Esto no es cierto si el poliedro no es convexo.

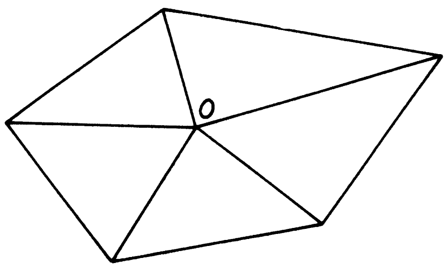


Veamos ahora la demostración del importante teorema siguiente:

TEOREMA 12 (de Euler). *En todo poliedro convexo, el número de vértices v, el de aristas a, y el de caras c, satisfacen la igualdad.*

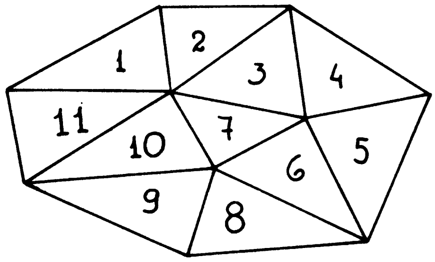
$$v - a + c = 2$$

Demostración. Observemos primero lo siguiente. Si tomamos un punto O interior a cada cara, y lo unimos con los vértices de esa cara, el número $v - a + c$ no se altera si consideramos los triángulos que se forman como nuevas caras (aunque están en un mismo plano), el punto O como nuevo vértice y los lados de los triángulos como nuevas aristas. La razón de esto es la siguiente: en cada cara hemos aumentado un vértice (el punto O), pero hemos suprimido una cara (el polígono). Hemos aumentado en n el número de aristas, pero también hemos aumentado en n el número de caras, (los triángulos). Entonces el número $v - a + c$ no ha cambiado después de esta operación.



Esta observación nos permite suponer que todas las caras del poliedro son triángulos.

Para demostrar el teorema veamos primero el siguiente caso: supongamos que tenemos un polígono plano subdivido en triángulos. Vamos a contar el número de vértices, aristas y caras de esa subdivisión.



Comencemos por numerar los triángulos procediendo de manera de no dejar ningún "hueco".

Llamamos a_1 y v_1 al número de aristas y de vértices del primer triángulo, $a_{2,}$ v_2, el número de aristas y vértices del segundo triángulo que *no están* en el primero, $a_{3,}$ v_3 el número de aristas y vértices del tercer triángulo, que *no están* en los anteriores. Así a_k, v_k es el número de aristas y vértices del k-ésimo triángulo que *no están* en los $k-1$ anteriores.

El k-ésimo triángulo puede tener una sola arista común con los anteriores en cuyo caso tendrá también dos vértices comunes, luego $a_k = 2,\ v_k = 1$. Puede ser que tenga dos aristas en común con los anteriores, en este caso $a_k = 1,\ v_k = 0$.

Por la forma en que hemos numerado los triángulos sin dejar "huecos" *no puede* ocurrir que el k-ésimo triángulo tenga las tres aristas en común con los anteriores.

En cualquiera de los dos casos $a_k = v_k + 1$

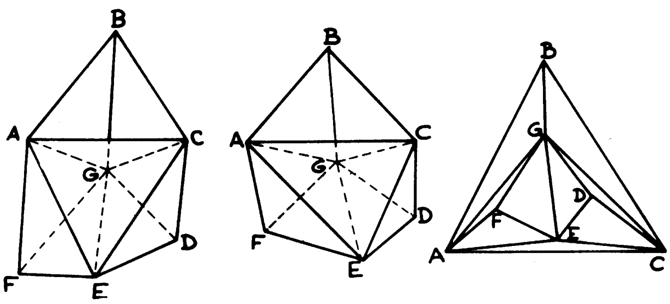
Sumando todos los a_k y los v_k obtenemos el número de aristas y vértices. Si hay c triángulos, sumamos:

$$\begin{aligned} a_1 &= v_1 \\ a_2 &= v_2 + 1 \\ a_3 &= v_3 + 1 \\ \cdot &= \dots \\ \cdot &= \dots \\ a_c &= v_c + 1 \\ a &= v + (c-1) \end{aligned}$$

Obtenemos la relación $v - a + c = 1$.

Ahora podemos comenzar la demostración del Teorema de Euler. Supongamos que tenemos un poliedro convexo cualquiera y le quitamos una de sus caras. Obtenemos una superficie Poliédrica que podemos aplastar sobre un plano, estirando las caras si es necesario.

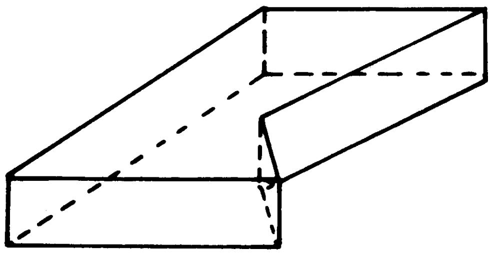
Por ejemplo, si quitamos la cara ABC de este poliedro:

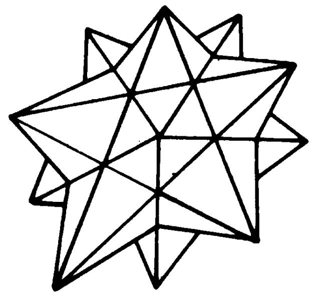


obtenemos así un triángulo plano, que a su vez está subdividido en triángulos. Por el resultado anterior los vértices, caras y aristas de esta subdivisión cumplen la relación $v - a + c' = 1$.

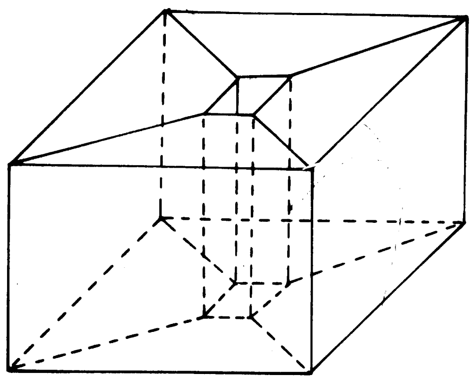
Contando ahora la cara que quitamos al principio queda $v - a + c = 2$.

Observación: En la demostración no se ha usado la convexidad del poliedro con toda su fuerza. Solamente se ha usado el hecho de que al quitar una cara, lo restante se puede "deformar continuamente" y sin romperlo, en un polígono plano. El teorema será cierto para cualquier poliedro que tenga esta propiedad. En particular, para cualquier poliedro que se puede "deformar continuamente" sin romperlo en otro poliedro que sea convexo. Entonces el teorema de Euler es cierto en estos casos:





No es cierto en un poliedro con un hueco. Por ejemplo éste:

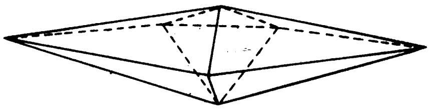


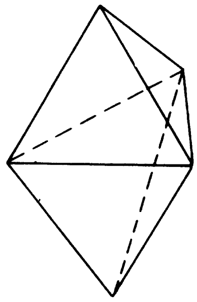
aquí $v - a + c = 0$.

* * *

Un poliedro se dice *regular* si todas sus caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice concurre el *mismo número* de aristas.

Observación: Con esta definición de poliedros regulares queremos que el poliedro se vea igual cuando lo miramos desde sitios distintos. Por ejemplo los poliedros de la figura de abajo *no* son regulares, aunque todos sus caras son triángulos equiláteros iguales.

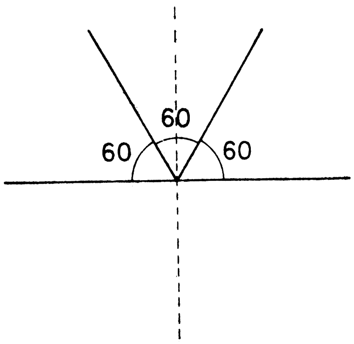




TEOREMA 13. *Existen sólo cinco poliedros regulares convexos.*

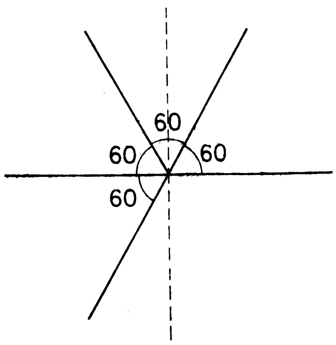
Para demostrar esto basta fijarse en el ángulo poliedro de un vértice cualquiera y aplicar el Teorema 9 de la clase pasada:

Si las caras son triángulos, podemos tener tres caras concurrentes en un vértice.



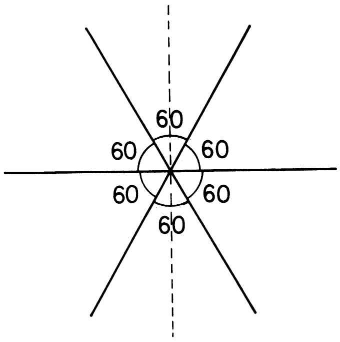
$3 \times 60 = 180 < 360$, Tetraedro

Podemos también tener 4 caras concurrentes:



$4 \times 60 = 240 < 360$, Octaedro

Podemos todavía tener 5 caras concurrentes:

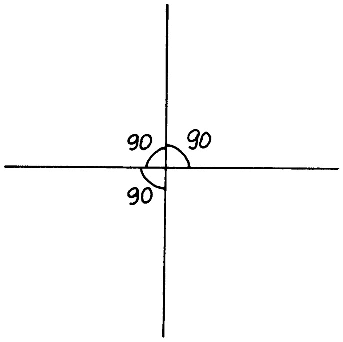


$5 \times 60 = 300 < 360$, Icosaedro

No existe ningún poliedro que tenga un vértice de seis o más caras formadas por triángulos equiláteros, ya que $6 \times 60 = 360 \not< 360$.

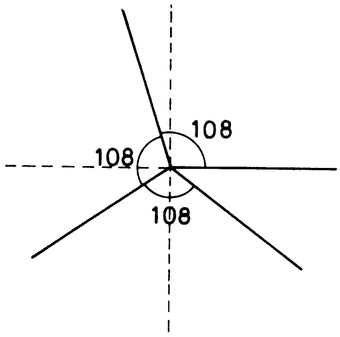
Veamos cuántos poliedros regulares convexos podemos fabricar de modo que sus caras sean cuadrados.

En un vértice pueden ocurrir 3 caras, ya que



$3 \times 90 = 270 < 360$, Cubo

Ya no hay más porque $4 \times 90 = 360$. Veamos cuántos podemos construir con pentágonos.



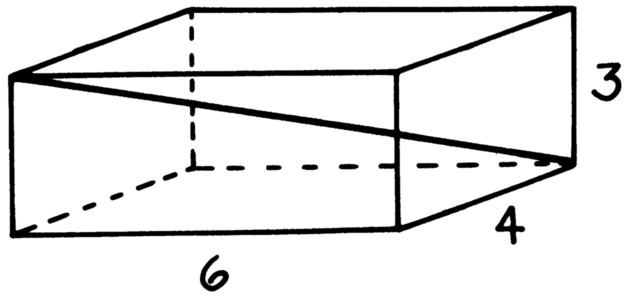
$3 \times 108 = 324 < 360$, Dodecaedro.

Ya no hay más porque $4 \times 108 > 360$. Finalmente, si queremos que las caras sean hexágonos o polígonos con mayor número de lados obtendremos ángulos con más de $360°$, lo que es imposible, luego no hay más poliedros regulares.

BIBLIOGRAFÍA. Puig Adam, *Geometría Métrica.* Vol. I.

EJERCICIOS.

1. Pruebe que los planos bisectores de los ángulos diedros de un tetraedro se cortan en un punto.
2. Pruebe que las perpendiculares a las caras de un tetraedro, trazadas por los centros de las circunferencias circunscritas a las caras, se cortan en un punto.
3. Cortar un cubo por un plano de manera que la sección sea un hexágono regular.
4. Halle el área del hexágono del problema anterior, si la arista del cubo mide 1 cm.
5. Calcule la longitud de la diagonal de un paralelepípedo cuyas aristas miden 3cm, 4cm y 6cm, respectivamente.



6. Si un poliedro convexo tiene 9 vértices y 15 aristas. ¿Cuántas caras debe tener?
7. *a*) El cubo y el octaedro son duales uno del otro, en el sentido descrito en el programa audiovisual, luego el número de vértices de uno es igual al número de caras del otro. Usando este hecho y el Teorema de Euler, pruebe que ambos tienen el mismo número de aristas. Calcule ese número (sin contarlas).

   b) Calcule el número de aristas del icosaedro y del dodecaedro (sin contarlas).

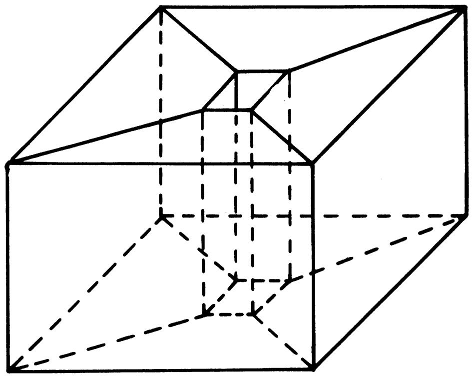
   c) ¿Cuál es el número de aristas de un dodecaedro convexo cualquiera aunque no sea regular?
8. *a*) a)¿Cuál es el número de vértices, aristas y caras de una pirámide que tiene por base un polígono regular de n lados?

   b) Si se corta la pirámide por un plano paralelo a la base ¿cuál es el número de vértices, caras y aristas del poliedro que resulta?
9. *a*) Pruebe que la suma de los ángulos de un polígono convexo cualquiera, de n lados es $(n-2)\pi$

   b) Pruebe que la suma de los ángulos de las caras de un poliedro convexo es $2\pi(v-2)$, donde v es el número de vértices del poliedro

   (Utilice (*a*) en cada cara del poliedro. Luego averigüe la relación que hay entre el número de lados de todos los polígonos que forman las caras y el número de aristas del poliedro. Finalmente utilice el Teorema de Euler).

10. Cuente el número de vértices, aristas y caras de este poliedro.



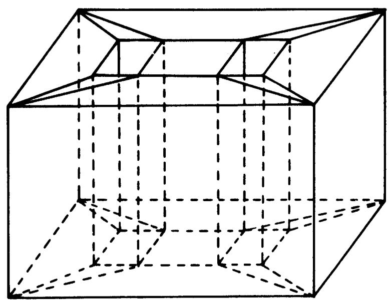
Compruebe que $v - a + c = 0$. ¿Será cierta esta relación para cualquier poliedro con un "hueco" ?

Sugerencia: Haga muchos dibujos hasta convencerse.

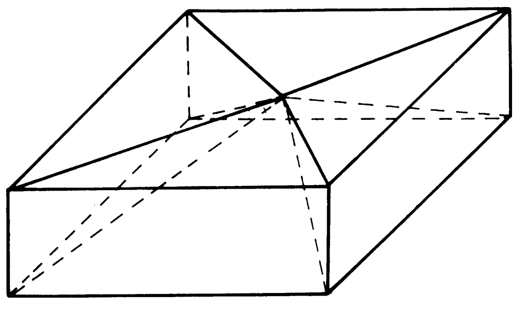
11. Cuente el número de vértices, caras y aristas de este poliedro.

Compruebe que $v - a + c = -2$ para cualquier poliedro con dos "huecos" ?

¿Entonces el número $v - a + c$ puede servir para "clasificar" los poliedros según el número de huecos que tengan?



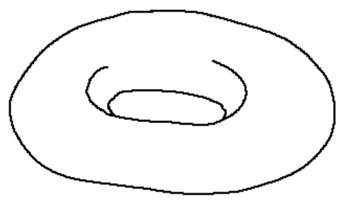
12. Si la superficie del poliedro tiene auto intersección (se corta a si misma) entonces el teorema de Euler no vale. Cuente el número de vértices, caras y aristas de este poliedro.



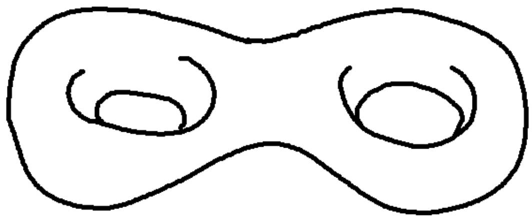
13. Dijimos que el teorema de Euler pertenece a una rama de la Geometría que se ocupa de las propiedades invariantes por "deformaciones continuas" de las figuras. Esta rama se llama Topología.

Para comprender un poco más el alcance de este teorema, imaginemos un poliedro hecho de goma y en una de sus caras le ponemos una válvula para inflarlo. Si después de inflado obtenemos una esfera subdivida en polígonos curvos, claramente $v - a + c = 2$. Esto se puede probar de la misma manera que probamos el teorema de Euler, sólo que obtendríamos triángulos curvos.

Si al inflar el poliedro obtenemos un salvavidas, entonces $v - a + c = 0$

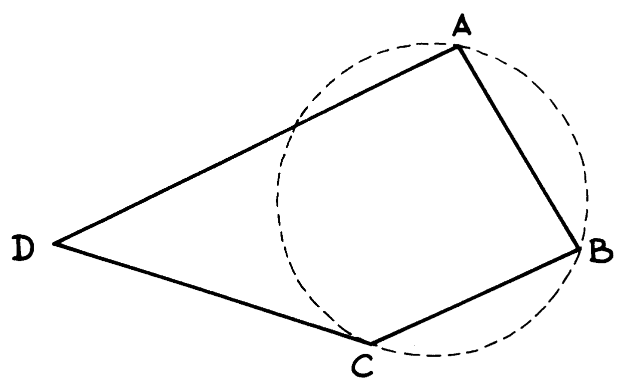


Si al inflar el poliedro obtenemos un salvavidas para parejas entonces $v - a + c = -2$.



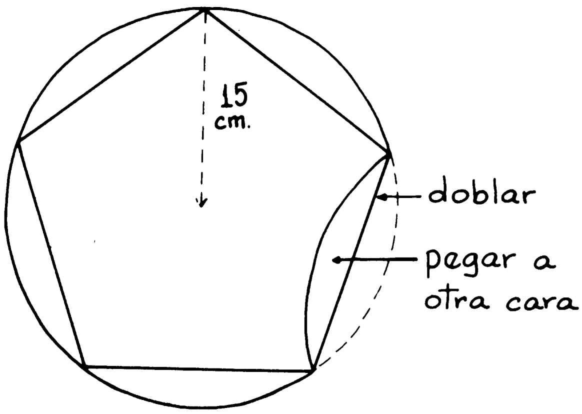
14. Hallar el área de la superficie de un dodecaedro cuya arista mide 4 cm.
15. Usted seguramente ha visto muchos pisos cubiertos de mosaicos cuadrados. ¿Podría usted cubrir un piso con pentágonos regulares? ¿Podría cubrirlo con octágonos? ¿hexágonos? ¿triángulos equiláteros?
16. Pruebe que la suma de los ángulos de un cuadrilátero cualquiera es 2π.

    (Considere la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Cuánto valen los ángulos del cuadrilátero medidos en arcos de esta circunferencia).



17. Pruebe que las bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero cualquiera son los lados de otro cuadrilátero que es inscriptible.
18. Construya modelos de cartulina de los cinco poliedros regulares convexos. (Usted necesitará estos modelos más adelante). Corte tantos círculos iguales de cartulina bien gruesa, como caras tiene el poliedro que quiere construir. Dibuje el polígono correspondiente inscrito en ese círculo, doble por los lados del polígono y péguelos.

    Ejemplo: Para construir el dodecaedro, corte 12 círculos de cartulina (de unos 30 cm. de diámetro) dibuje los pentágonos regulares inscritos.



19. Si el lado de un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio 1 es igual a ℓ muestre que el lado del polígono regular del mismo número de lados circunscrito al mismo círculo tiene por

    longitud $L = \dfrac{2\ell}{\sqrt{4-\ell^2}}$.
20. Dado el radio r y la apotema a de un polígono regular P de n lados, calcular el radio r' y la apotema a' del polígono regular de igual perímetro que P y doble número de lados

    Respuesta: $$a' = \frac{a+r}{2}$$ $$r' = \sqrt{r\left(\frac{a+r}{2}\right)}$$
21. Demostrar que al unir tres vértices A, B y C de un tetraedro regular $ABCD$ con el punto medio de la altura bajada desde D, se obtienen tres rectas perpendiculares entre sí dos a dos.
22. Compruebe que al unir los puntos medios de las *aristas* de un tetraedro regular obtenemos un octaedro regular. Muestre que uniendo los puntos medios de las aristas de cualquier otro poliedro regular obtenemos un poliedro no regular.
23. Un pentágono regular está inscrito en un círculo de radio 1. Calcule su área

    Respuesta:$A = \dfrac{5}{4}\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$

CAPíTULO 8

TRANSFORMACIONES I:
TRASLACIONES, ROTACIONES, SIMETRÍAS Y SEMEJANZAS

Es muy importante en Matemática el estudio de transformaciones del plano o del espacio. Por transformación del plano (del espacio) entendemos una *aplicación* biyectiva del plano (espacio) sobre si mismo. Esto es, una correspondencia que a cada punto A hace corresponder otro punto A' de manera que todo punto es el correspondiente de algún otro (sobreyectiva) y que si las imágenes de dos puntos A y B coinciden, $A' = B'$, entonces $A = B$ (inyectiva).

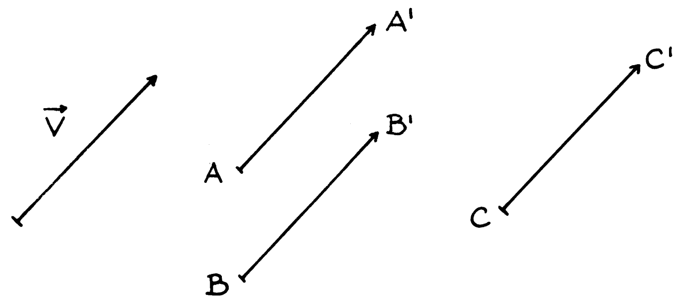
Dicho de otra manera: una transformación del plano (o del espacio) es una aplicación del plano (espacio) en si mismo tal que:

1. Las imágenes de los puntos cubren todo el plano (espacio).
2. Puntos distintos tienen imágenes distintas.

EJEMPLOS.

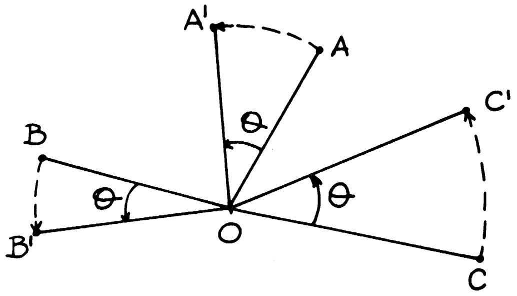
1. La traslación por un vector $\vec{\mathbf{V}}$

   Dado un vector fijo $\vec{\mathbf{V}}$ en el plano (o en el espacio) a cada punto A del plano (o del espacio) le corresponde el punto A' obtenido como el extremo del vector **V** copiado a partir de A como origen.



2. **La rotación de centro O y ángulo θ en el plano:**

   Dado un punto fijo O del plano y un ángulo θ, a cada punto A del plano le corresponde otro A' determinado de la siguiente manera: trazamos la recta AO y copiamos el ángulo θ con vértice O y lado OA. (Consideramos los ángulos positivos en el sentido contrario a las agujas del reloj). Sobre el otro lado del ángulo marcamos el punto A' de manera que $\overline{OA} = \overline{OA'}$



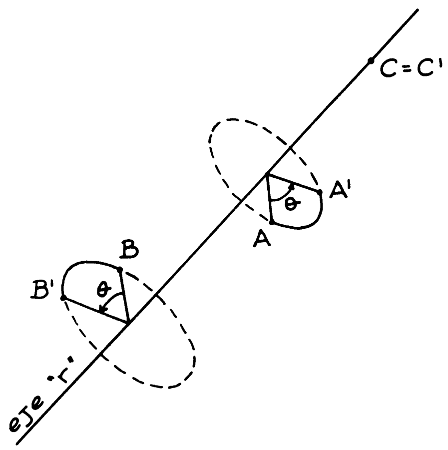
La imagen del punto O es el mismo punto O, $O' = O$.

3. **Rotación de un ángulo θ alrededor de un eje en el espacio:**

   Dado un ángulo θ y una recta "r" cualquiera en el espacio, a cada punto A le hacemos corresponder A' definido así:

   Trazamos el plano que pasa por A y perpendicular a la recta r. La corta en un punto O. En ese plano determinamos A' por la rotación de centro O y ángulo θ - Los puntos del eje r, se transforman en ellos mismos, quedan fijos.

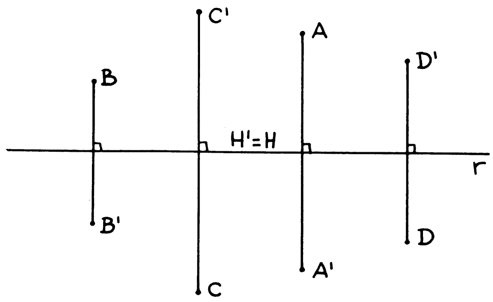
   Nota: En esta definición hay ambigüedad respecto al sentido de los ángulos. Para decidir esto habría que orientar el espacio (ver más adelante) o darle una orientación a cada eje de rotación (Ley del tirabuzón). Escriba usted mismo la definición correcta.



4. **Simetría respecto a una recta "r" en el plano:**

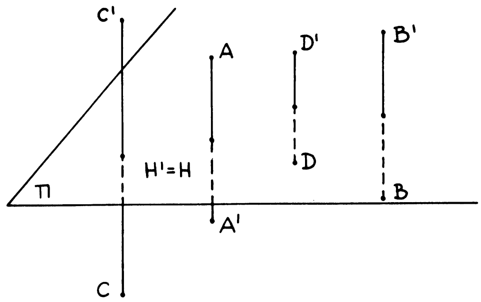
   A todo punto A del plano le corresponde A' determinado trazando una perpendicular por A a la recta y llevando al otro lado de la recta r una distancia $\overline{A'H} = \overline{AH}$.

   Es claro que los puntos H de la recta se transforman en ellos mismos: $H' = H$.



5. **Simetría respecto a un plano "π" en el espacio:**

   Se define igual a la anterior sustituyendo recta r por el plano π

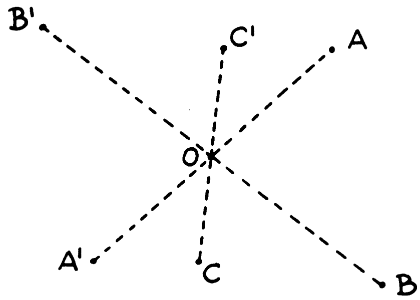


Los puntos H del plano π quedan fijos.

6. **Simetría respecto a un punto O en el espacio:**

   Dado el punto O fijo, a cada punto A le corresponde otro A' que se obtiene así: se traza la recta $\overline{AO}$ y se lleva la distancia AO al otro lado del punto O : $\overline{AO} = \overline{A'O}$.

   El punto O queda fijo.

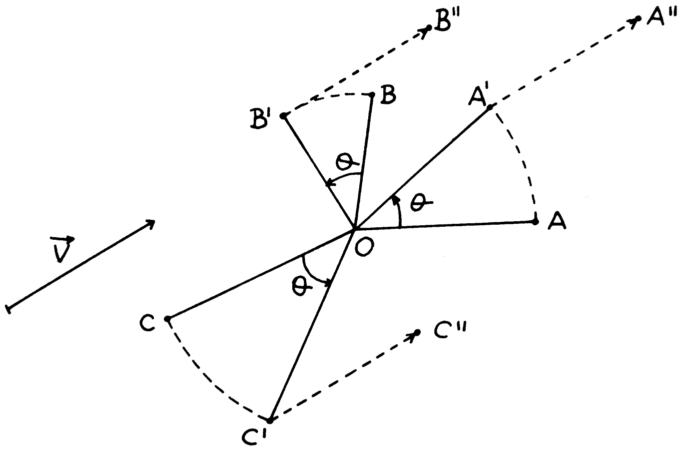


Compruebe que todos estos ejemplos definen *aplicaciones biyectivas:* Cada punto es la imagen de otro (no necesariamente distinto de él) y si dos puntos tienen la misma imagen, los dos puntos coinciden.

Si tenemos dos transformaciones del plano (o dos transformaciones del espacio), llamémoslas $\mathbf{T_1}$ y $\mathbf{T_2}$, el *producto de estas dos transformaciones* $\mathbf{T_2} \cdot \mathbf{T_1}$ es la transformación definida así: a cada punto A del plano (o del espacio) le hacemos corresponder la imagen A'', por la transformación $\mathbf{T_2}$, de la imagen A'

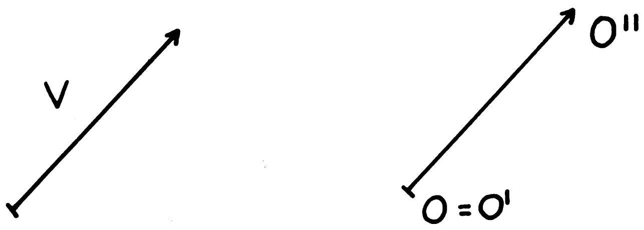
de A por la transformación $\mathbf{T_1}$. La transformación producto $\mathbf{T_2} \cdot \mathbf{T_1}$ equivale entonces a hacer primero la transformación $\mathbf{T_1}$ y luego la $\mathbf{T_2}$.

EJEMPLO. En el plano, el producto de la traslación $\mathbf{V}$ por la rotación de centro O y ángulo θ, transforma A en A'', B en B'', C en C'', etc.

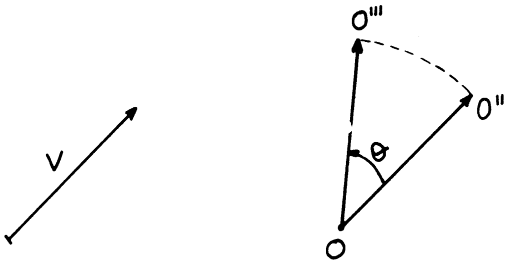


Si A', B', C' son las imágenes A, B y C por la rotación y A'', B'' y C'' son las imágenes de A', B' y C' por la traslación, entonces A'', B'' y C'' son las imágenes de A B y C por el producto de las dos transformaciones.

Observación 1: La imagen de O es O'' ya que $O' = O$.



Si hacemos el producto a la inversa, es decir, primero la traslación y luego la rotación entonces la imagen de O será $O''' \neq O''$.

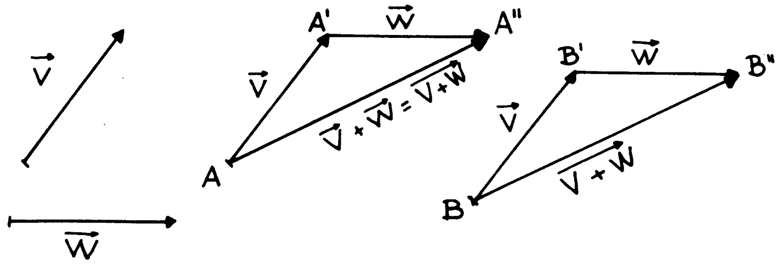


Esto es suficiente para poder afirmar que en el producto de transformaciones el orden de los factores *sí* altera el producto, en general $\mathbf{T_2 T_1} \neq \mathbf{T_1 T_2}$.

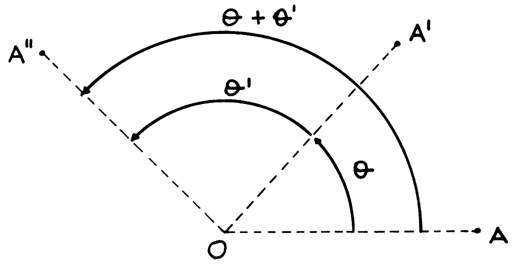
Observación 2: El orden en la notación $\mathbf{T_2T_1}$ se recuerda fácilmente pensando en el producto como composición de aplicaciones: $\mathbf{T_2T_1}(A) = \mathbf{T_2}(\mathbf{T_1}(A)) = \mathbf{T_2}(A') = A''$.

Otros ejemplos:

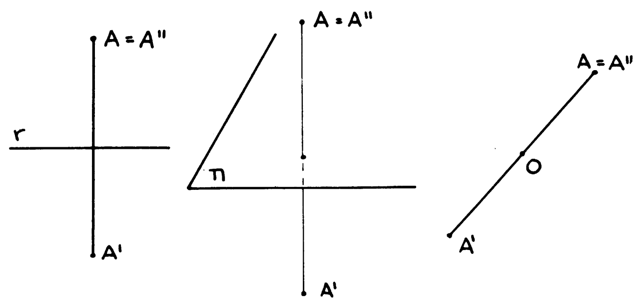
1. El producto de dos traslaciones, definidas por los vectores $\vec{\mathbf{V}}$ y $\vec{\mathbf{W}}$ es otra traslación definida por el vector $\vec{\mathbf{V}} + \vec{\mathbf{W}}$.



2. El producto de dos rotaciones planas del mismo centro O y de ángulos θ y θ', es otra rotación de centro O y ángulo $\theta + \theta'$.

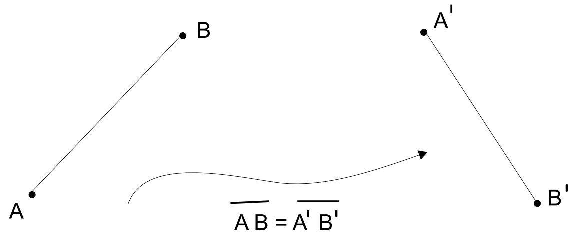


3. El producto de dos rotaciones en el espacio, alrededor del *mismo eje* y ángulos θ y θ', es otra rotación alrededor del mismo eje y ángulo $\theta + \theta'$.
4. El producto de una simetría por si misma es la *transformación identidad:* la transformación que deja todos los puntos fijos.

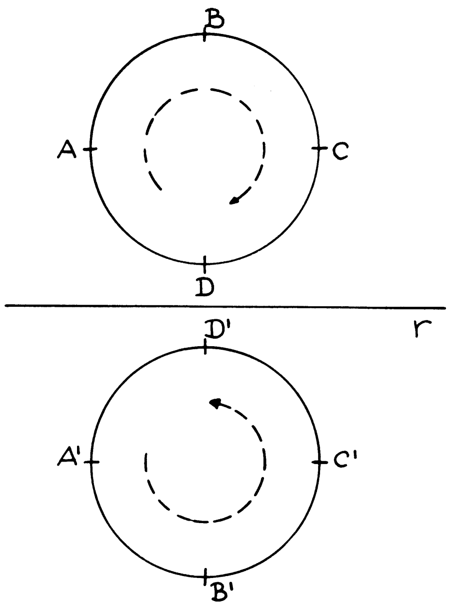


Todos los ejemplos de transformaciones del plano y del espacio que hemos visto hasta ahora tienen una propiedad en común: si A' y B' son las imágenes de A y B entonces la distancia de A' a B' es igual a la distancia de A a B.

Definición: Una *transtormación rígida* es una transformación que conserva las distancias, es decir si A' y B' son las imágenes de dos puntos cualesquiera A y B, entonces: distancia $\overline{AB}$ = distancia $\overline{A'B'}$



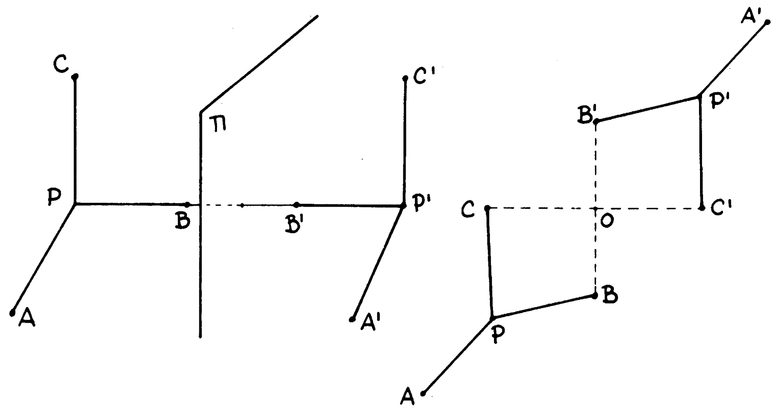
Las traslaciones, las rotaciones y las simetrías son transformaciones rígidas. Sin embargo, las simetrías se diferencian en algo de los otros dos tipos de transformaciones. Al observar la imagen de esta circunferencia por la simetría respecto a la recta r notamos que el sentido de recorrido de la circunferencia se invierte en la imagen.



En efecto los puntos $ABCD$ se encuentran ordenados en el sentido de las agujas del reloj, sus imágenes A', B', C', D' están ordenados en sentido contrario.

Diremos que esta simetría cambia la orientación del plano (y de las figuras).

Del mismo modo, si observamos un triedro en el espacio y su imagen por una simetría respecto a un plano π, o una simetría central respecto a un punto O, notamos que el triedro no se puede llevar sobre su imagen por un movimiento físico. Diremos que estas simetrías cambian la orientación del espacio (y de las figuras también).



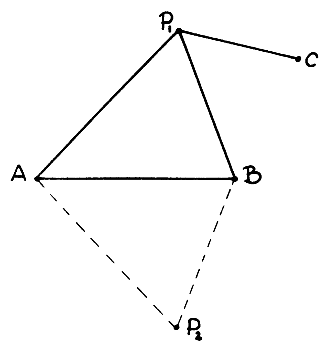
En cambio las traslaciones y las rotaciones conservan la orientación, son movimientos del plano (o del espacio) realizables físicamente.

Hasta ahora hemos visto ejemplos de transformaciones rígidas del plano y del espacio. ¿Serán esas todas las transformaciones rígidas que existen? Obviamente no. Podemos imaginar los más diversos movimientos rígidos en el plano o en el espacio. Sin embargo, el siguiente teorema nos dice que podemos construir todas las transformaciones rígidas como productos de las que ya hemos visto.

TEOREMA 14. *Toda transformación rígida del plano (o del espacio) es el producto de traslaciones, rotaciones y simetrías.*

Demostraremos el teorema en el caso del plano primero: observemos que si tenemos tres puntos del plano A, B y C *no alineados*, cualquier punto P queda determinado si conocemos sus distancias a A, B y C, porque al conocer las distancias $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ el punto P sólo puede ocupar la posición P_1 o la posición P_2.

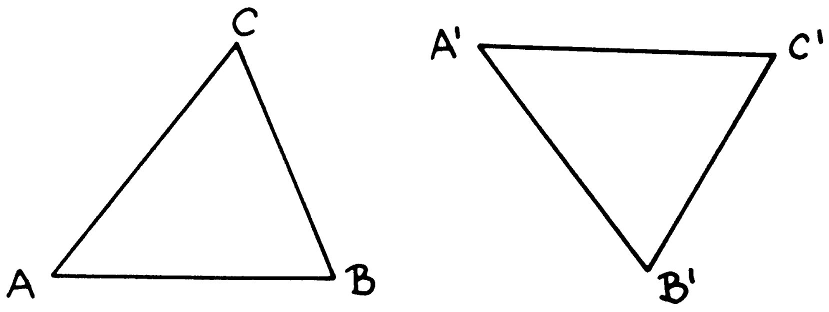
Al conocer también $\overline{PC}$, como C no está en la recta AB, el punto P queda completamente determinado: o bien $P = P_1$ o bien $P = P_2$.



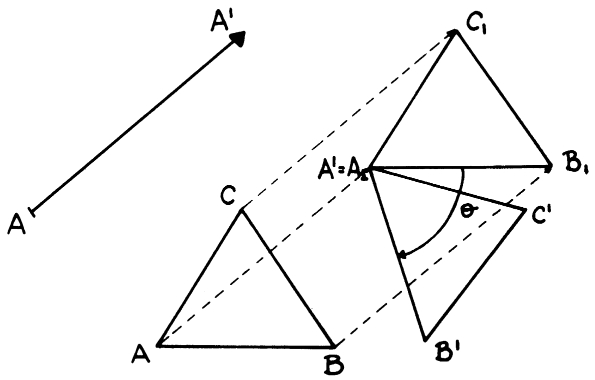
Esto nos dice que si tenemos una transformación rígida y conocemos las imágenes A', B' y C' de tres puntos no alineados A, B y C, también conoceremos la imagen P' de cualquier punto P ya que $\overline{PA} = \overline{P'A'}, \overline{PB} = \overline{P'B'}, \overline{PC} = \overline{P'C'}$.

Consideremos una transformación rígida cualquiera, supongamos que $A'B'C'$ son las imágenes de A, B y C y que la imagen de un punto cualquiera P es P'.

$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ ya que tienen sus tres lados iguales, supongamos, por el momento, que también tienen la misma orientación:



Haciendo la traslación $\mathbf{T}$ definida por el vector $\overrightarrow{AA'}$ transformamos ΔABC en $\Delta A_1B_1C_1$ y claro que $A_1 = A'$.

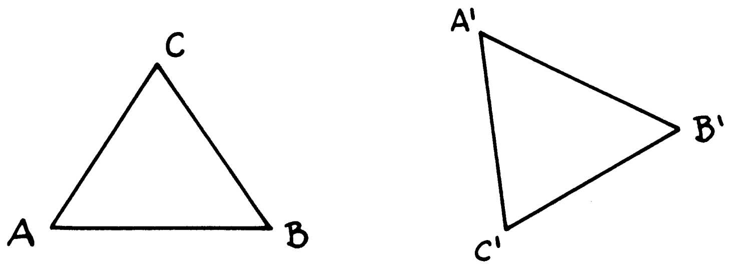


Como $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A'B'C'$, haciendo la rotación $\mathbf{R}$ de centro $A' = A_1$ y ángulo θ el triángulo $A_1B_1C_1$ se transforma en el $A'B'C'$.

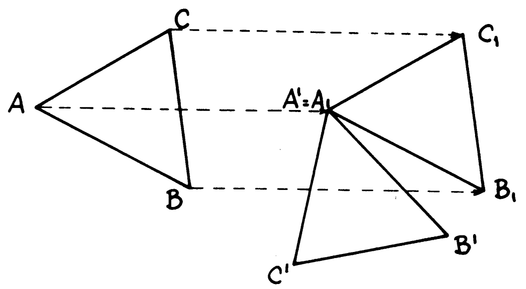
En resumen la transformación $\mathbf{R} \cdot \mathbf{T}$ transforma el ΔABC en el triángulo $A'B'C'$. Veamos qué pasa con un punto cualquiera P. La traslación $\mathbf{T}$ manda a P en el único punto P_1 cuyas distancias a A_1, B_1 y C_1 son iguales a las distancias de P a A, B y C.

La rotación $\mathbf{R}$ manda a P_1 en el único punto P_2 cuyas distancias a A', B' y C' son iguales a las distancias de P a A, B y C, entonces $P_2 = P'$ ya que las transformación original es rígida. Quiere decir que ésta no es otra cosa que el producto $\mathbf{RT}$.

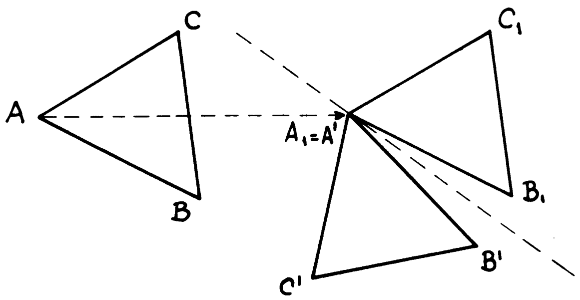
Supongamos ahora que la imagen $A'B'C'$ tiene orientación distinta de ABC.



La traslación $\mathbf{T}$ definida por el vector $\overrightarrow{AA'}$ manda ΔABC en el $\Delta A_1B_1C_1$; $A_1 = A'$.



Los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A'B'C'$ son iguales pero tienen orientación distinta. Efectuemos una simetría $\mathbf{S}$ respecto a la recta que pasa por A y por el punto medio del segmento B_1B'.

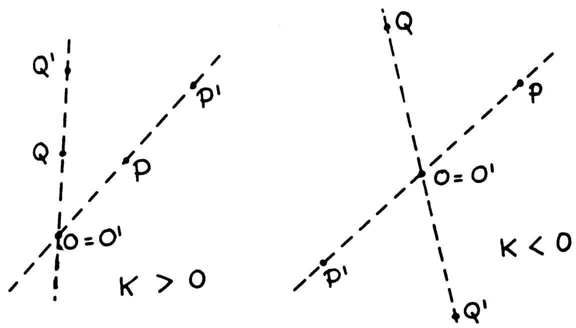


La simetría $\mathbf{S}$ transforma el triángulo $A_1B_1C_1$ en el triángulo $A'B'C'$. En resumen, la transformación $\mathbf{ST}$ transforma ΔABC en $A'B'C'$, por un razonamiento análogo al anterior $\mathbf{ST}$ manda un punto cualquiera P del plano en P' precisamente. Luego $\mathbf{ST}$ es la transformación rígida original.

Con esto se termina la demostración en el caso del plano, en el caso de una transformación rígida del espacio la demostración se hace de manera análoga, observando que las imágenes de cuatro puntos *no coplanarios* cualesquiera determinan completamente la transformación. La demostración en este caso queda como ejercicio (Ejercicio No. 8).

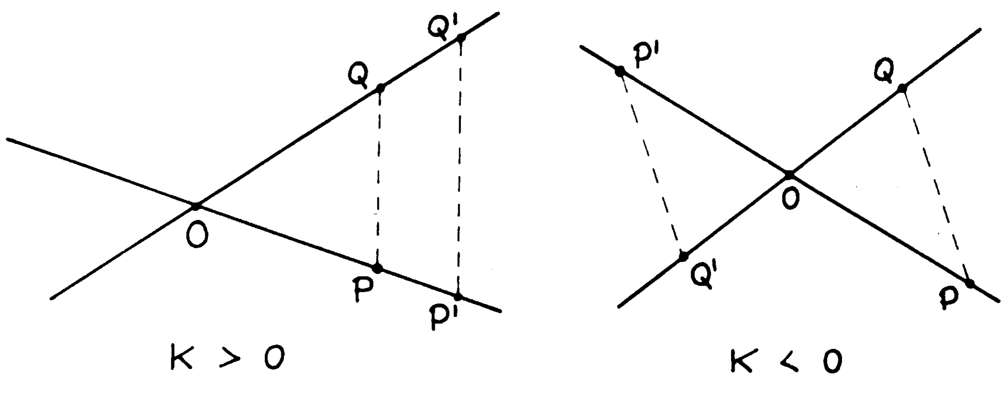
Para terminar vamos a definir una transformación del plano (o del espacio) que no es rígida.

Fijado un punto O del plano (o del espacio) y un número $k \neq 0$, a cada punto del plano (o del espacio) P se le hace corresponder P' determinado de la manera siguiente: se traza la recta OP y se toma P' sobre esta recta, de manera que los segmentos $\overline{OP}$ y $\overline{OP'}$ cumplan la relación $\overline{OP'} = k\overline{OP}$. Si $k > 0$, P' estará del mismo lado que P. Si $k < O$, P' estará del otro lado.

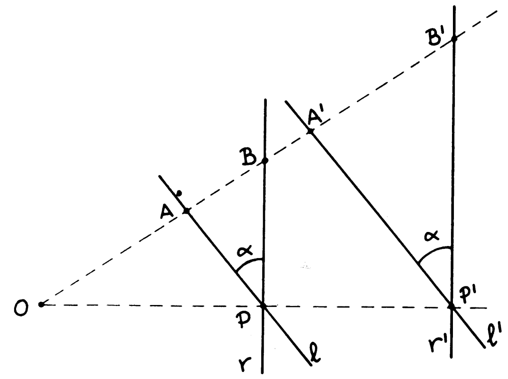


Esta transformación se llama *homotecia* y obviamente es biyectiva, para todos los números del plano distinto de O. Si decimos que $O' = O$ entonces es b, vector en todo el plano.

La homotecia no es una transformación rígida, la distancia $\overline{P'Q'}$ es k veces la distancia $\overline{PQ}$, como resulta de la semejanza de ΔOPQ y $\Delta OP'Q'$.



La homotecia transforma una recta en otra recta paralela a ella, en consecuencia el ángulo de dos rectas será igual al ángulo de las rectas imágenes.



Las transformaciones que conservan los ángulos se llaman conformes, en otra guía veremos unos ejemplos de transformaciones *conformes*, así como su utilidad.

Si componemos una transformación rígida con una homotecia obtenemos una transformación llamada *semejanza.* Ya vimos criterios para decidir cuándo dos triángulos son semejantes.

Decir que dos triángulos son semejantes es decir que uno se obtiene del otro mediante una transformación rígida seguida de una homotecia. (¿Por qué?).

BIBLIOGRAFÍA

P. Puig Adam, *Geometria Métrica,* Vol. 1.

EJERCICIOS

1. Demuestre cuidadosamente que la imagen de una recta por una simetría, o una traslación, o una rotación (en el plano o en el espacio), es otra recta.
2. Lo mismo, en el caso de una transformación rígida cualquiera.
3. Dado un cuadrado en el plano, determine todas las rectas que son ejes de simetría del cuadrado. Esto es, todas las rectas tales que, la simetría respecto a esa recta deja al cuadrado invariante, (manda puntos del cuadrado a puntos que también están en el cuadrado).
4. Que una transformación rígida deje una figura **invariante** quiere decir que transforma la figura sobre si misma; es decir la imagen de un punto de la figura es otro punto de la figura).

   Determine todas las rotaciones del plano tales que:

   a) Dejen invariante a un cuadrado.

   b) Las que dejan invariante a un triángulo equilátero.

   c) A un pentágono regular.

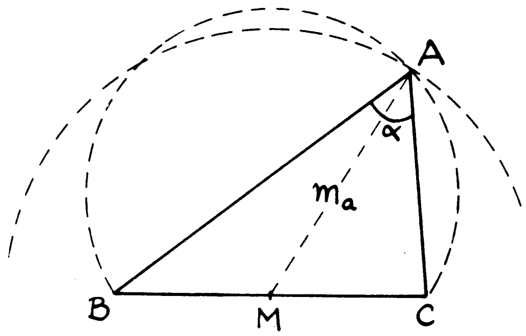
5. Determine todos los planos de simetría de un cubo.
6. Lo mismo para un dodecaedro regular y para un icosaedro regular (ayúdese con los modelos de cartulina construidos por usted).
7. Determine todos los ejes de rotación que dejan invariante a un cubo, a un dodecaedro, a un icosaedro. ¿Cuántos hay en cada caso?
8. Demuestre que una transformación rígida del espacio es el producto de traslaciones, rotaciones respecto a ejes, simetrías centrales o simetrías respecto a planos.
9. Demuestre que toda transformación rígida del plano que deja fijo a un *solo punto,* es una rotación (usar el método de la prueba del teorema 14 arriba).
10. Demuestre que el producto de dos rotaciones de distintos centros O_1 y O_2 y ángulos θ_1 y θ_2 en el plano es otra rotación o es una traslación. (Use el problema 9). En los casos en que el producto sea una rotación, halle un método gráfico para encontrar el centro de esa rotación. ¿Cuál es el ángulo?
11. ¿Qué puede decir del producto de dos rotaciones respecto a ejes paralelos en el espacio? ¿Y si los ejes se cortan, o no son coplanarios?
12. Se podría definir la simetría respecto a un punto en el plano y la simetría respecto a un eje en el espacio. No lo hemos hecho porque estas transformaciones ya están incluidas en los ejemplos que dimos. ¿Cuáles son estas transformaciones?
13. La homotecia de centro O y razón $k = 1$ es la identidad. La homotecia de centro O y razón $k = -1$ es la simetría respecto al punto O.
14. ¿Cuál es el producto de dos simetrías del espacio respecto a dos planos perpendiculares? ¿Y el producto de tres simetrías respecto a tres planos perpendiculares entre sí?
15. ¿En qué se transforma una circunferencia por una homotecia en el plano? ¿Y una esfera por una homotecia en el espacio?
16. ¿Cuál es la imagen de una recta, o un plano, o una circunferencia, o una esfera, por una semejanza?
17. Dos figuras se dicen congruentes en el plano (o en el espacio) si una es la imagen de la otra por una transformación rígida. Conocemos criterios para decidir si dos triángulos en el plano son congruentes (si tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido igual, si tienen un lado igual y los ángulos adyacentes iguales, etc.). Dé criterios análogos para decidir si dos tetraedros en el espacio son congruentes.
18. Dar criterios análogos a los de semejanza de triángulos para decidir cuándo dos tetraedros son semejantes.

19. Pruebe que toda transformación rígida en el plano puede expresarse como producto de simetrías respecto a rectas diferentes en el plano.
20. Muestre que el producto de dos homotecias de distinto centro no es necesariamente una homotecia.

PROBLEMAS

Para resolver problemas geométricos, o problemas sobre construcciones geométricas, es muy eficaz considerar el problema como si estuviera resuelto y luego determinar relaciones o propiedades que deben cumplir los puntos o elementos que estamos tratando de determinar. Ya vimos algunos ejemplos de esta situación, utilizando lugares geométricos. Por ejemplo el problema 9 de la Guía No. 4: construir con regla y compás un triángulo del cual se conoce un lado $\overline{BC}$, el ángulo opuesto α y la mediana m_a. relativa a ese lado.

Considerando el problema resuelto, observamos que el vértice A está sobre el arco capaz del ángulo α respecto al segmento $\overline{BC}$. También observamos que A está sobre un círculo de centro M y radio m_a.

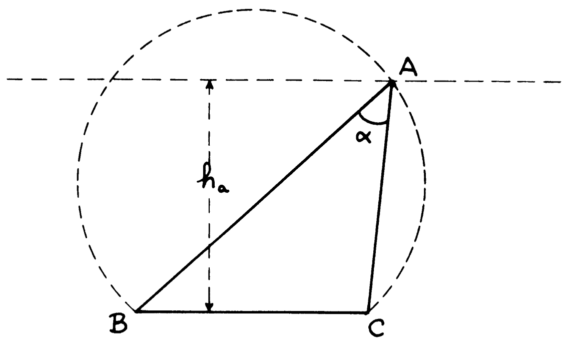


Esto nos da la manera de resolver el problema: El vértice A es la intersección de las dos circunferencias, que sabemos construir.

Otro ejemplo: Construir un triángulo del cual conocemos un lado BC, el ángulo opuesto α y la altura h_a.

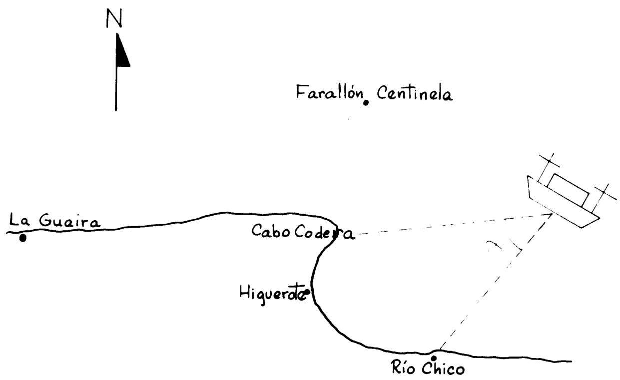
Al considerar el problema resuelto, observamos que el vértice A debe estar sobre una paralela a BC trazada a distancia h_a.

También debe estar sobre el arco capaz. Aquí también determinamos el vértice A como intersección de dos lugares geométricos.



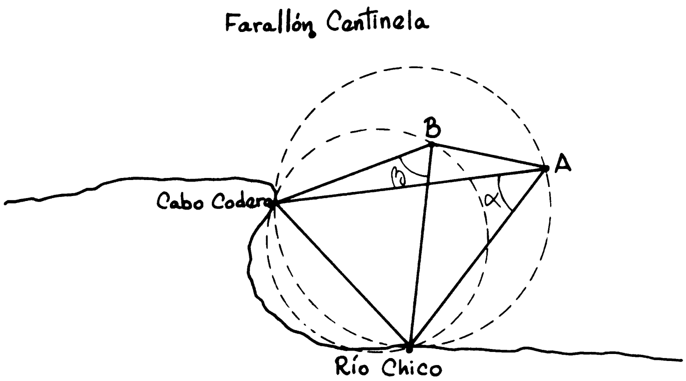
Las transformaciones que acabamos de estudiar son herramientas poderosas para atacar este tipo de problemas. Vamos a dar algunos ejemplos:

EJEMPLO 1. Un barco navega frente a la costa de Higuerote, conoce su velocidad y su dirección. Quiere determinar su posición exacta en la carta marina para evitar el Farallón Centinela (no tiene faro). Para esto mide el ángulo α bajo el cual se ven dos puntos de la costa (Cabo Codera y Río Chico, por ejemplo). Al cabo de 20 minutos vuelve a medir el mismo ángulo, obtiene la medida β,



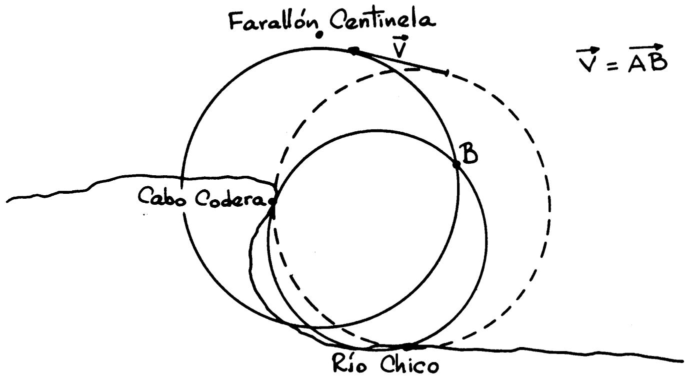
¿Cómo determina su posición?

Solución Si A es la primera posición del barco y B es la posición actual, 20 minutos después. Conocemos el vector $\overrightarrow{AB}$, puesto que conocemos la velocidad y dirección del barco.

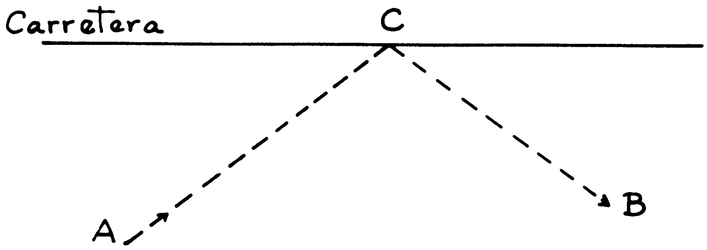


El punto B está sobre el arco capaz de β respecto al segmento C.C., R.Ch. El punto A está sobre el arco capaz de α respecto al mismo segmento. Entonces β tiene que ser la intersección del primer arco con la imagen del segundo por la traslación definida por $\overrightarrow{AB}$.

Podemos hacer la construcción geométrica del punto B sobre la misma carta marina.

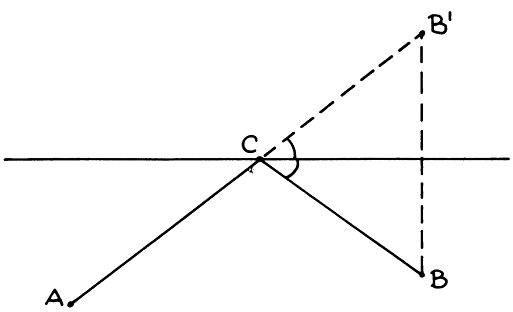


EJEMPLO 2. Una patrulla tiene que caminar de un pueblo A a otro pueblo B, pero antes de llegar a B debe dejar un mensaje sobre la carretera (ver figura). ¿Cuál es el camino más corto?

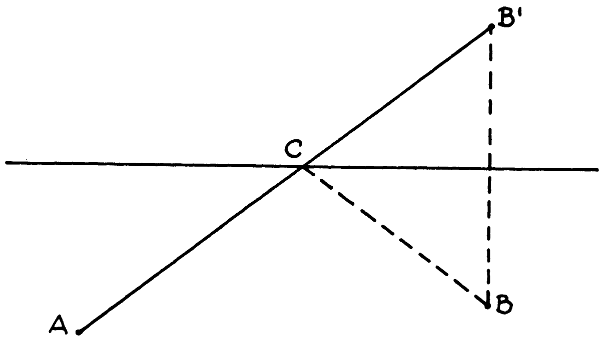


Supongamos el problema resuelto y sea ACB el camino más corto. Entonces si B' es el simétrico de B tendríamos que $\overline{CB'} = \overline{CB}$.

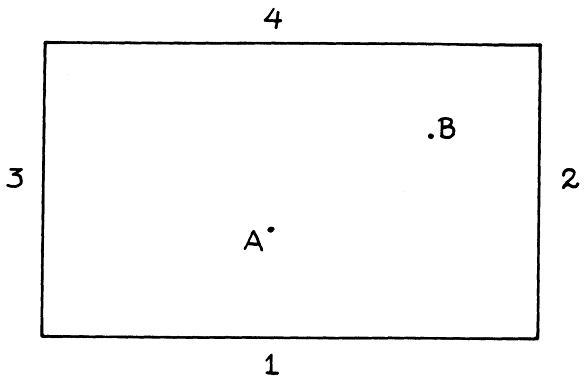
La distancia ACB debe ser igual al camino ACB'. El camino más corto posible será entonces cuando A, C y B' estén alineados.



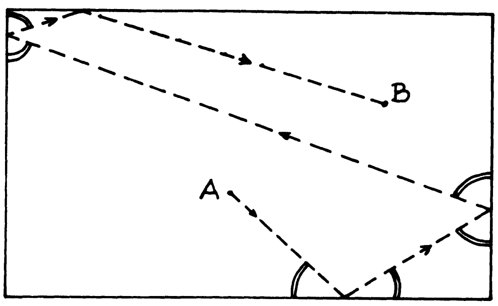
Podemos construir la solución trazando la recta que une al punto A con el simétrico de B, determinando así al punto C.



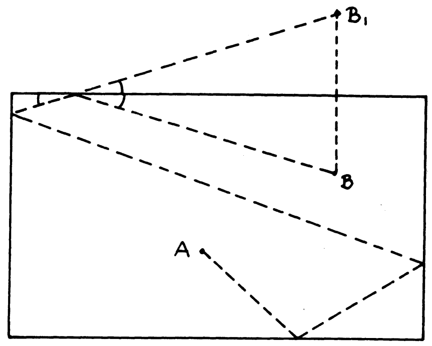
EJEMPLO 3. Dos bolas de billar están colocadas sobre la mesa de cualquier manera. ¿En qué dirección debemos golpear la bola A para que choque con B después de rebotar en las cuatro bandas en un orden prefijado 1, 2, 3, 4? (Ver figura)

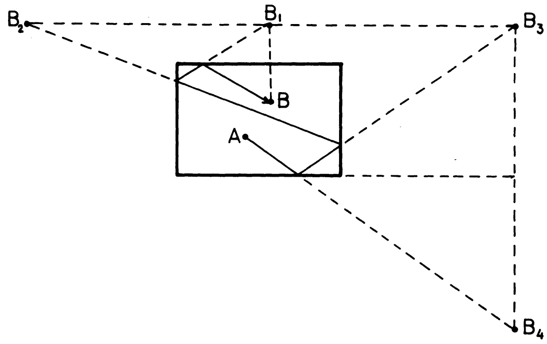


Solución: Supongamos el problema resuelto:



Como el ángulo de incidencia es igual al de reflexión, de la figura observamos que el problema se resuelve por un producto de cuatro simetrías respecto a las bandas de la mesa de billar, en el orden inverso al prefijado (ver las figuras siguientes).


B1
B
A


B2
B1
B3
B
A
B4

CAPíTULO 9

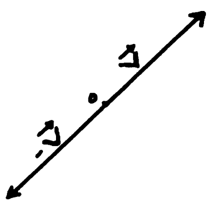
TRANSFORMACIONES II: GRUPOS DE TRANSFORMACIONES

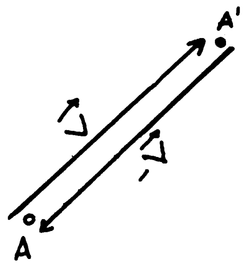
Hemos estado hablando de transformaciones del plano o del espacio: Aplicaciones biyectivas definidas geométricamente. El hecho de que la transformación sea biyectiva nos permite hablar de la transformación inversa. Esta es la transformación que deshace lo que hace la primera.

Si tenemos una transformación $\mathbf{T}$ que a cada punto A le hace corresponder A'; como $\mathbf{T}$ es biyectiva podemos definir otra transformación que hace que a A' le corresponda el punto A. Esta transformación se llama la inversa de $\mathbf{T}$; la vamos a denotar por $\mathbf{T^{-1}}$.

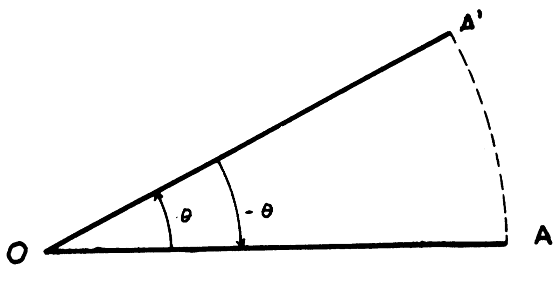
EJEMPLOS:.

1. La inversa de la traslación definida por el vector **V** es la traslación definida por el vector **-V.**

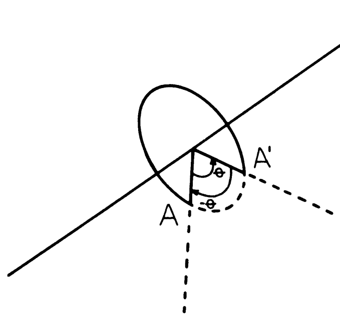




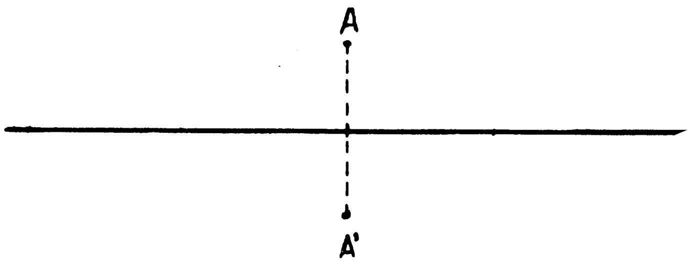
2. La inversa de la rotación plana de centro O y ángulo θ es otra rotación plana de centro O y ángulo $-\theta$. (Recuerde que los ángulos positivos se toman en el sentido contrario al de las agujas del reloj, los negativos en sentido opuesto).



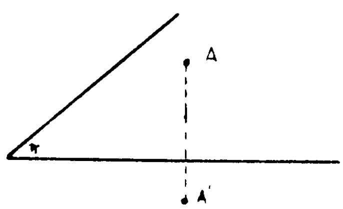
3. La inversa de una rotación respecto a una recta en el espacio con ángulo θ, es otra rotación respecto al mismo eje y ángulo $-\theta$.

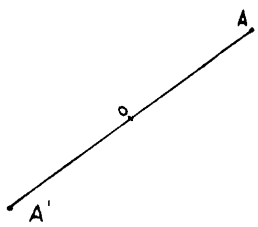


4. La inversa de una simetría respecto a una recta en el plano es ella misma: coincide con su inversa.

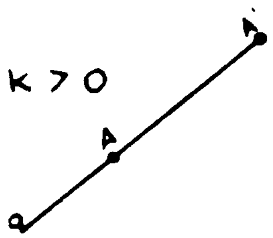


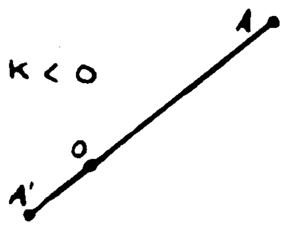
5. También ocurre que la inversa de una simetría respecto a un plano en el espacio (o respecto a un punto O) coincide con ella misma.





6. La inversa de una homotecia de razón k y centro O es otra homotecia del mismo centro O, pero de razón $\dfrac{1}{k}$.

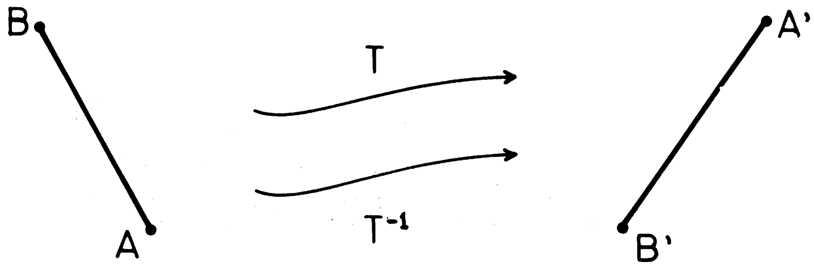




$$\overline{OA'} = k\overline{OA} \Rightarrow \overline{OA} = \tfrac{1}{k}\overline{OA'}$$

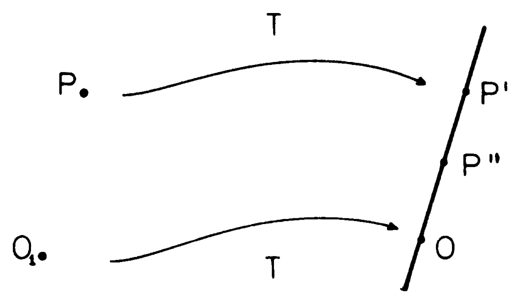
$$\overline{OA'} = k\overline{OA} \Rightarrow \overline{OA} = \tfrac{1}{k}\overline{OA'}$$

7. La inversa de una transformación rígida cualquiera $\mathbf{T}$ es otra transformación rígida, ya que si $\mathbf{T}$ transforma A en A' y B en B', entonces: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Luego la inversa $\mathbf{T}^{-1}$ transforma A' en A, B' en B y también conserva la distancia.



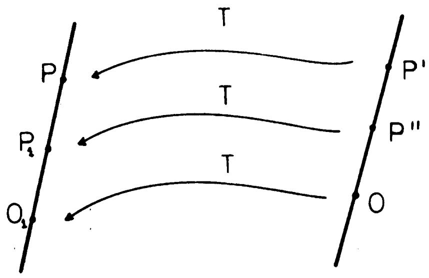
8. La inversa de una semejanza de razón k es otra semejanza de razón $\frac{1}{k}$.

   Una semejanza es el producto de una transformación rígida seguida de una homotecia. Lo primero que a uno se le ocurre es decir que la transformación inversa es el producto de la homotecia inversa seguida de la inversa de la transformación rígida. Esto es cierto, pero cuando definimos semejanza hicimos primero la transformación rígida y luego la homotecia. Como el producto de transformaciones no es conmutativo, en general, esto nos causa una dificultad. Debemos ser más cuidadosos. Supongamos que la semejanza $\mathbf{S}$ es el producto de la transformación rígida $\mathbf{T}$ seguida de la homotecia $\mathbf{H}$. O sea: $\mathbf{S} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{T}$. Si O es el centro de la homotecia, sea O_1 la imagen inversa de O por $\mathbf{T}$. Esto es, $\mathbf{T}$ transforma a O_1 en O. Sea P un punto cualquiera del plano (o del espacio) y sea P' la imagen de P por la transformación $\mathbf{T}$, P'' la imagen de P' por $\mathbf{H}$.



$\overline{OP''} = k\overline{OP'}$

La transformación $\mathbf{T}^{-1}$ transforma O en O_1 y P' en P, luego la recta OP' se transforma en la recta O_1P. Entonces P'' se transforma en algún punto P_1 de esta recta.



Como $\mathbf{T^{-1}}$ es también rígida, conserva las distancias: $\overline{O_1P_1} = \overline{OP''}$ y $\overline{O_1P} = \overline{OP'}$. Luego $\overline{O_1P} = k\overline{O_1P_1}$. Si aplicamos a P_1 la homotecia $\mathbf{H_1}$, de centro O_1 y razón $\dfrac{1}{k}$, lo convertimos en P. Como esto ocurre para cualquier punto P (del plano o del espacio) resulta que $\mathbf{S^{-1}} = \mathbf{H_1T^{-1}}$, es también una semejanza.

* * *

Definición: Un conjunto de transformaciones del plano o del espacio se llama *Grupo de transformaciones* si cada vez que hacemos el producto de dos transformaciones del conjunto, obtenemos otra transformación que también está en el conjunto y la inversa de cualquier transformación del conjunto, también está en el conjunto.

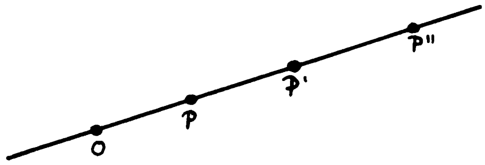
Esta definición obliga a que la transformación identidad esté incluida en el conjunto.

Observación: En realidad, la definición de grupo en abstracto es un poco más complicada. Aquí lo que definimos realmente es un subgrupo del grupo de todas las biyecciones.

EJEMPLOS

1. Las traslaciones del plano forman un grupo ya que el producto de dos traslaciones es la traslación definida por el vector suma y la inversa de una traslación es también una traslación. La identidad es la traslación definida por el vector nulo.
2. Las traslaciones del espacio forman un grupo.
3. Las rotaciones con el mismo centro en el plano forman un grupo.
4. Las rotaciones alrededor de un mismo eje en el espacio forman un grupo.
5. El conjunto de todas las transformaciones rígidas del plano es un grupo. Ya vimos que la inversa de una transformación rígida es también rígida. Es claro que el producto de dos de ellas es también rígido puesto que: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ y $\overline{A'B'} = \overline{A''B''} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{A''B''}$.
6. El conjunto de todas las transformaciones rígidas del espacio es un grupo. Este grupo contiene a las traslaciones del espacio y a las rotaciones alrededor de un mismo eje, como *subgrupos.*

7. El conjunto de todas las homotecias de un mismo centro es un grupo: El producto de dos homotecias del mismo centro y de razón k y h respectivamente es la homotecia del mismo centro y razón hk.



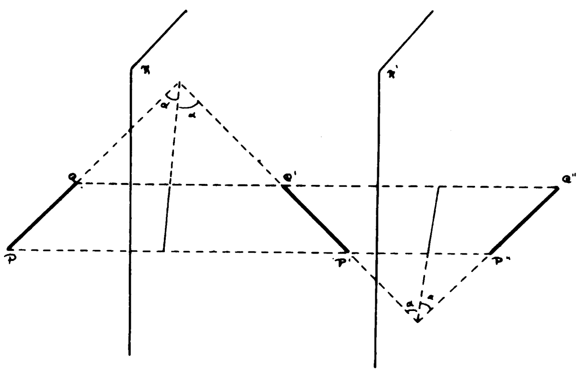
$$\overline{OP'} = K\overline{OP},\ \overline{OP''} = h\,\overline{OP'} \Rightarrow \overline{OP''} = h\,k\,\overline{OP}.$$

8. El conjunto de todas las semejanzas del plano (o del espacio) es un grupo: ya vimos que la inversa de una semejanza es otra semejanza. El producto de dos semejanzas de razón h y k respectivamente es una semejanza de razón $h \cdot k$ (Ver ejercicio No. 2).

Vamos a dar ahora ejemplos de conjuntos de transformaciones que *no* forman un grupo.

Vimos en los ejercicios anteriores que el producto de dos simetrías respecto a planos perpendiculares no es una simetría sino una rotación de $180°$ alrededor de la recta intersección. Luego las simetrías respecto a planos no pueden formar un grupo.

Un ejemplo más espectacular se obtiene si hacemos el producto de dos simetrías respecto a planos paralelos π y π'. Si P y Q son dos puntos cualesquiera del espacio veamos como se transforman:



Del dibujo resulta que $\overline{P''Q''}$ y $\overline{PQ}$ son paralelos y del mismo tamaño. Como P y Q son puntos arbitrarios podemos dejar fijo P y hacer variar a Q por todo el espacio; siempre $\overline{PQ}$ y $\overline{P''Q''}$ son paralelos y del mismo tamaño. Luego la transformación producto es la traslación definida por el vector **PP**$''$

NOTAS

1. La idea de grupo de transformaciones es importantísima tanto en Matemática como en sus aplicaciones a otras ciencias. Por una parte un grupo de transformaciones es un "objeto cerrado", en el sentido de que podemos hacer operaciones con sus elementos y nunca salirnos de él.

Por otra parte tiene una “estructura” relativamente sencilla, es relativamente fácil de entender. Bastaría entender como funcionan sus “generadores”. Por ejemplo: Una transformación rígida cualquiera puede parecer a primera vista como algo terriblemente complicado, sin embargo sabemos que ella es un producto de traslación por rotación o simetría. Estas últimas son transformaciones muy sencillas y entendemos perfectamente cómo funcionan. Son “generadores” de las transformaciones rígidas que, al fin y al cabo, no son tan complicadas como parecían. Otro ejemplo, las semejanzas: Estas se reducen a productos de traslaciones, rotaciones, simetrías y homotecias. Entendemos bien cómo funcionan estos “generadores” y ya las semejanzas no tienen mayor misterio.

2. Félix Klein, matemático alemán que vivió de 1849 a 1925, hizo una clasificación de las “geometrías” de la manera siguiente: Para él una geometría es el estudio de aquellas propiedades que no cambian al hacer transformaciones de un determinado grupo de transformaciones.

   Comenzando con el grupo de transformaciones más pequeño, pero todavía lo suficientemente grande para que dé una geometría interesante, se van construyendo grupos cada vez más grandes y así esa geometría se va generalizando.

   El primer grupo que se considera es el Grupo de las Semejanzas. La geometría que se obtiene se llama *Geometría Métrica*; es el estudio de las propiedades del espacio o de las figuras que no cambian aunque se transforme el espacio por una semejanza. Un buen ejemplo de esto es el Teorema de Pitágoras: aunque un triángulo rectángulo se transforme por una semejanza sigue siendo cierto que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Casi todo lo que se hace en este curso es Geometría Métrica.

   El grupo de las semejanzas se amplía a un grupo más grande llamado Grupo Afín, que da origen a la llamada *Geometría Afín*. De esta geometría veremos un poco en las dos últimas clases de este curso, por ahora adelantemos que el teorema de Pitágoras no pertenece a esta Geometría ya que hay “transformaciones afines” que convierten un triángulo rectángulo en otro que no lo es.

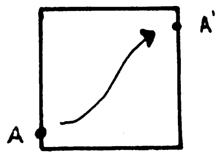
   El paso siguiente es ampliar el Grupo Afín para formar otro más grande, que Klein llamaba “Grupo de las Transformaciones por Radios Vectores Recíprocos”, y que son las transformaciones llamadas “Inversiones”. El próximo paso es ampliar este grupo para formar el Grupo Proyectivo, que da origen la *Geometría Proyectiva* , de éstas últimas no veremos ningún ejemplo en este curso. Finalmente Klein considera el grupo de las “Transformaciones Continuas”, que contiene al Grupo Proyectivo. Para dar una idea intuitiva diremos que una transformación biyectiva del plano, o del espacio, es continua si cada vez que tomamos puntos que se acercan a un punto P, sus imágenes también se acercan a P'. Tal transformación puede deformar mucho las figuras, puede estirarlas, encogerlas, pero nunca las rompe. Todos los ejemplos de transformaciones que estudiamos en este curso son continuas ya que este grupo contiene a los otros. Un ejemplo de transformación no continuas se obtendría dividiendo el plano en franjas paralelas e intercambiando estas franjas de cualquier manera. La geometría a que da origen el grupo de transformaciones continuas es el estudio de las propiedades invariantes por "deformaciones continuas" de las figuras, se llama *Topología*. El teorema de Euler pertenece a este tipo de geometría.

3. La idea de grupo de transformaciones es importante además por sus aplicaciones a otras ciencias. Estos grupos existen en la naturaleza. En Física son indispensables. En Química también, al estudiar estructuras atómicas. En Cristalografía, son frecuentísimos. Los grupos que aparecen en estos últimos dos casos son pequeños: tienen un número finito de elementos, contrariamente a los que hemos estudiado hasta ahora que tienen una cantidad infinita de elementos.

* * *

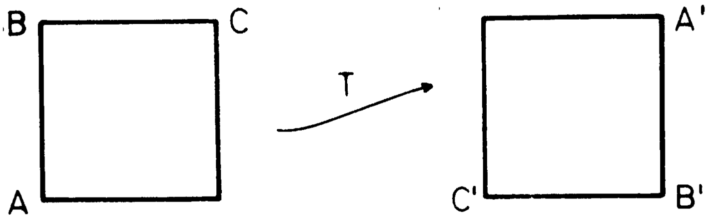
En muchas de las aplicaciones en Química y en Cristalografía aparecen grupos de transformaciones que dejan invariante a un determinado poliedro. Vamos a ver un ejemplo.

EJEMPLO 1: Comencemos con un cuadrado en el plano. Queremos determinar todas las transformaciones rígidas que transforman ese cuadrado en si mismo: la imagen A' de un punto A del cuadrado está también en el cuadrado. Claramente estas transformaciones forman un grupo:

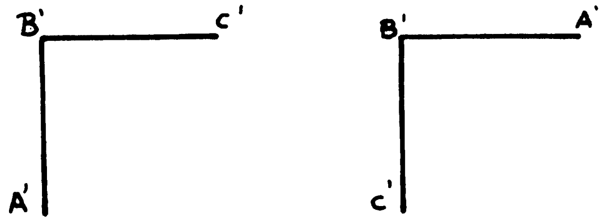


El producto de dos de ellas también deja invariante al cuadrado y la inversa de una de ellas tiene la misma propiedad.

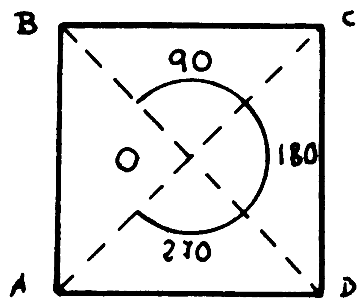
Por lo dicho en la Guía No. 8 cada transformación rígida queda completamente determinada si conocemos la imagen de tres vértices: A, B y C.



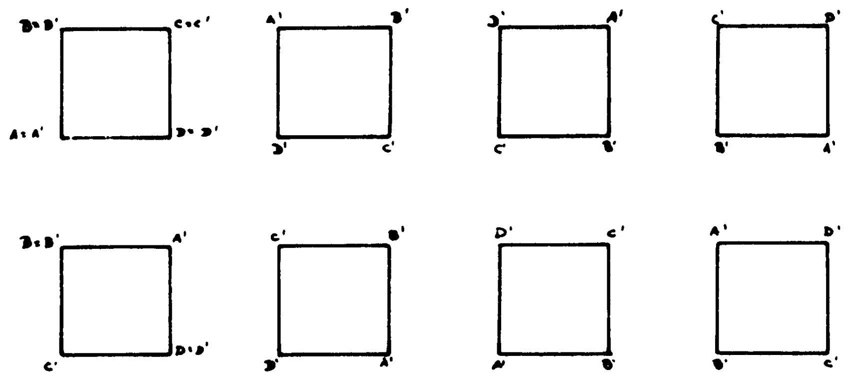
Fijémonos en el vértice B por un momento. Su imagen sólo puede ocupar 4 posiciones, los cuatro vértices, de lo contrario habría puntos del cuadrado cuya imagen estaría fuera del cuadrado. Para cada posición de B' los vértices A' y C' pueden estar de manera que $A'B'C'$ tenga sentido positivo o, intercambiando, de modo que $A'B'C'$ tengan sentido negativo:



El número total de transformaciones rígidas del cuadrado es, entonces, $4 \times 2 = 8$ ¿Cómo caracterizarlas?. Todas ellas son: rotaciones de centro O y ángulos $0°$, $90°$ $180°$ ó $270°$, o bien simetrías respecto a una diagonal, o bien el producto de una simetría y una rotación.

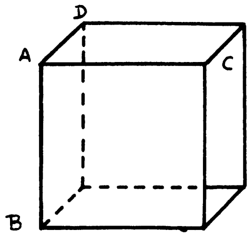


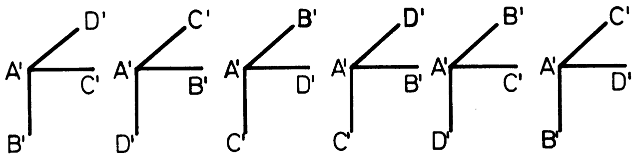
Queremos hallar el número mínimo de "generadores" de este grupo de 8 elementos, es decir, el número mínimo de transformaciones tales que todas las demás se obtengan como productos de ellas. Este número es 2, los generadores son: la rotación de $90°$ y la simetría respecto a la diagonal BD, por ejemplo. Todas las demás se obtienen como productos de estas dos



EJEMPLO 2: Veamos ahora cuántas transformaciones rígidas del espacio dejan invariante un cubo. Siguiendo el mismo método del cuadrado; una transformación rígida queda completamente determinada cuando conocemos la imagen de un triedro (cuatro puntos no coplanarios).

Fijémonos en el triedro $ABCD$. La imagen A' de A puede ocupar 8 posiciones distintas, los 8 vértices. En cada posición de A' las imágenes $B'C'$ y D' pueden ocupar 6 posiciones distintas:





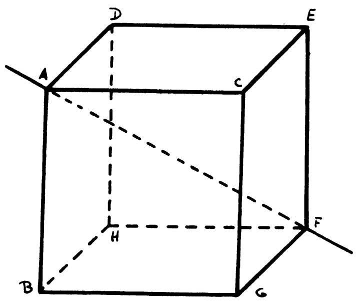
Observe que las tres primeras conservan la orientación, las tres últimas cambian la orientación original.

El número total de transformaciones será $6\times 8 = 48$. La mitad de estas, 24, conservarán la orientación del cubo y la otra mitad cambiará la orientación del cubo. Observe que las 24 transformaciones que conservan la orientación forman, ellas mismas, un grupo.

Queremos ahora hallar el número mínimo de "generadores" de este grupo. Es decir, hallar el número mínimo de transformaciones tales que cualquier otra transformación rígida del cubo sea producto de ellas.

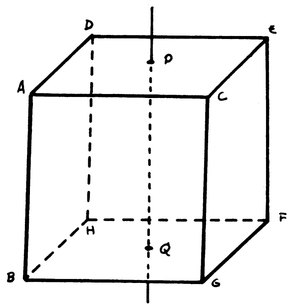
No nos preocupamos por ahora de las 24 que invierten la orientación, ellas se obtienen componiendo la simetría central con alguna de las 24 que conservan la orientación.

Fijémonos en la diagonal AF, hay tres rotaciones alrededor de ella, con ángulos de $120°$, $240°$ y $360°$ que dejan el cubo invariante (piense en "rotaciones" de triángulo equilátero BCD).



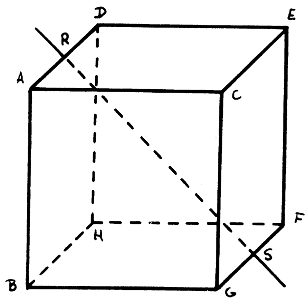
Estas tres rotaciones forman por si mismas un subgrupo de 3 elementos.

Fijémonos ahora en el eje que une los centros de dos caras PQ. Hay cuatro rotaciones alrededor de él con ángulos de $90°$, $180°$, $270°$ y $360°$, que dejan al cubo invariante.



Estas cuatro rotaciones forman también un subgrupo de 4 elementos.

Finalmente consideramos el eje que une los centros de dos aristas opuestas RS. Hay dos rotaciones alrededor de este eje que dejan el cubo invariante: la de $180°$ y la de $360°$. Estas dos rotaciones forman también un subgrupo de dos elementos del grupo de transformaciones rígidas del cubo.



Finalmente hacemos la siguiente afirmación: cualquier transformación rígida del cubo es el producto de algunas de las siguientes:

a) Rotación de $120°$ alrededor de AF.
b) Rotación de $90°$ alrededor de PQ.
c) Rotación de $180°$ alrededor de RS.
d) Simetría central.

La verificación de esta afirmación queda a cargo del estudiante. Utilice su modelo de cartulina del cubo (Obviamente que está permitido el producto de una de ellas por si misma las veces que sea necesario).

Estos son entonces los generadores de las 48 transformaciones rígidas del cubo.

BIBLIOGRAFÍA

1. Para grupos de rotaciones, transformaciones rígidas, semejanzas, etc. ver P. Puig Adam: *Geometría Métrica.* Vol. 1.
2. Para transformaciones rígidas de un cubo u otro poliedro, no le recomendamos ningún libro, hágalo todo usted mismo con sus modelos de cartulina.

3. Para grupos de transformaciones y clasificación de las geometrías: Félix Klein: *Matemática Elemental desde un punto de vista superior*, Vol. II, Cap. 2° y 3°.

EJERCICIOS

1. El conjunto formado por dos elementos: la transformación identidad y la simetría respecto a un plano π, es un grupo de transformaciones.
2. Complete la prueba de que el conjunto de todas las semejanzas del plano o del espacio es un grupo de transformaciones.
3. Haga un estudio del grupo de transformaciones rígidas que dejan invariante a un pentágono regular. En particular: número total de transformaciones, cuáles cambian la orientación, cuáles no, posibles subgrupos, generadores.
4. El mismo problema para un dodecaedro regular.
5. Lo mismo para un icosaedro regular. (Observe que este grupo es igual al anterior, por la dualidad entre ambos poliedros).

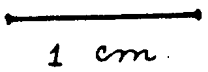
   Sugerencia: El caso del dodecaedro y el del icosaedro pueden resultar bastante complicados y consumir mucho tiempo. Tómelo como un juego, hágalo en tiempos libres, por diversión. Utilice sus modelos de cartulina y haga competencias con sus compañeros a ver quién obtiene más información sobre su grupo, generadores, planos de simetría, ejes, etcétera.
6. El mismo problema para un tetraedro regular y para un octaedro. (Este último es igual al caso del cubo ¿por qué?).
7. Diga cuáles de los siguientes conjuntos forman un grupo:
   a) El conjunto de las simetrías respecto a rectas que pasan por el origen y rotaciones centradas también en el origen.
   b) Rotaciones respecto a puntos cualesquiera en el plano.
   c) El conjunto de las simetrías respecto a planos paralelos a uno dado y traslaciones en el espacio.
   d) Homotecias de distinto centro en el espacio.
   e) Transformaciones rígidas que dejan fija una recta en el plano.
   f) El conjunto formado por las rotaciones de centros cualesquiera en el espacio y las traslaciones.

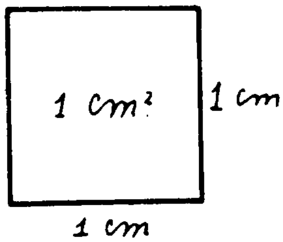
CAPíTULO 10

ÁREAS Y VOLÚMENES

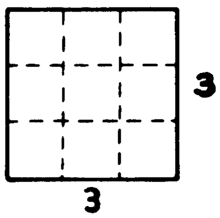
En este capítulo vamos a calcular las áreas y volúmenes de varias figuras.

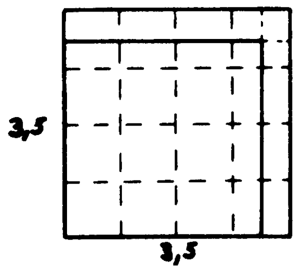
Una vez que se ha fijado la unidad de longitud, diremos que la unidad de área es el área de un cuadrado cuyo lado mide 1.



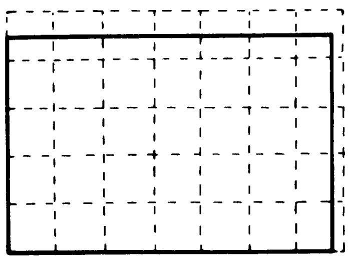


Medir el área de una figura plana, es averiguar cuántas veces cabe el cuadrado unidad en esa figura. Así, el área de un cuadrado de lado tres, por ejemplo, es 9. El área de un cuadrado de lado $3,5$ es: $(3,5)^2 = 12,25$.



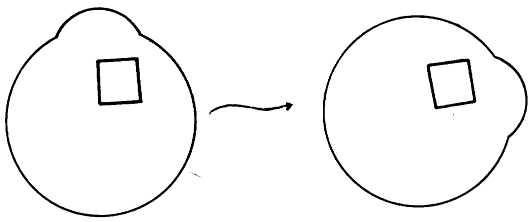


El área de un cuadrado cualquiera de lado b es b^2 . De la misma manera, el área de un rectángulo de base b y altura h es bh.



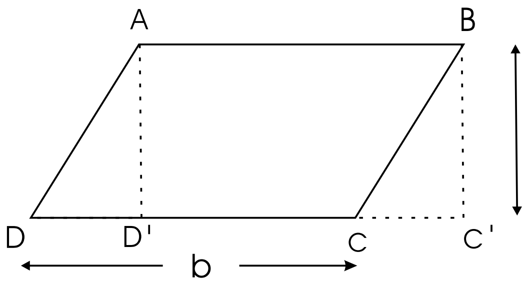
Área $= 6,8 \times 4,5 = 30,80$

Una *transformación rígida* cualquiera, en el plano o en el espacio, conserva el área de las figuras: si F' es la imagen de una figura F, entonces F y F' tienen áreas iguales. Para comprobar este hecho basta darse cuenta de que un cuadrado cualquiera contenido en la figura F se transforma en otro cuadrado igual contenido en la figura F', entonces el número de veces que cabe el cuadrado unidad en F es igual al número de veces que cabe en F'.



transformación rígida

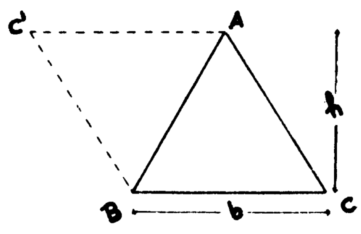
Esto nos permite calcular el área de un paralelogramo. Al trazar perpendiculares a la base por A y B obtenemos dos triángulos $AD'D$ y $BC'C$, que son congruentes (uno se obtiene del otro por traslación según el vector **AB**). Luego tienen igual área,



Entonces el área del paralelogramo $ABCD$ es igual al área del rectángulo $ABC'D'$: base por altura (bh).

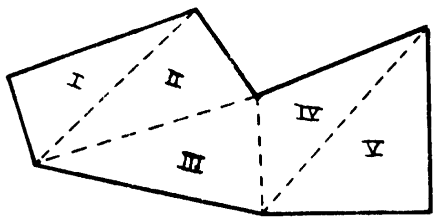
Ahora podemos calcular el área de cualquier triángulo.

El triángulo ABC es exactamente la mitad del paralelogramo $C'ACB$, ya que los triángulos ABC y $AC'B$ son congruentes.



El área del triángulo es entonces la mitad del área del paralelogramo: $\frac{1}{2}bh$.

Sabiendo calcular el área del triángulo, podemos calcular áreas de polígonos. Basta subdividir el polígono en triángulos:



Área = **Área I**

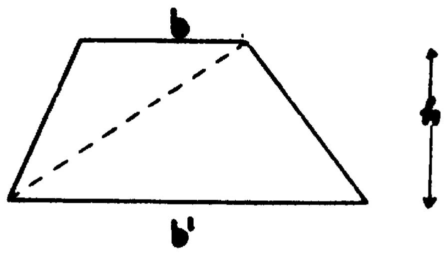
+ Área II

+ Área III

+ Área IV

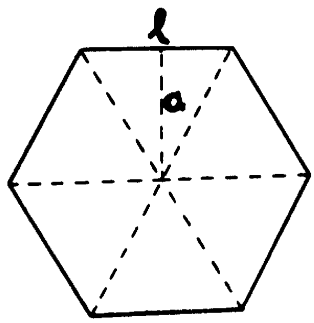
+ Área V

Por ejemplo el área del trapecio es:



$$\frac{1}{2}(b+b')h$$

Para calcular el área de un polígono regular, un hexágono por ejemplo, hacemos la subdivisión en triángulos con vértice en el centro del hexágono. Obtenemos seis triángulos iguales, de área $\frac{1}{2}a\,l$. El área del hexágono será $3al$.



En el caso de un polígono regular cualquiera, de n lados, obtendríamos n triángulos iguales (todos se obtienen de uno de ellos por rotaciones de centro O y ángulo $\dfrac{2k\pi}{n}$, $k = 1, 2, \dots n$)

Si l y a son el *lado* y *apotema* del polígono, cada triángulo tiene área $\frac{1}{2}la$. El área del polígono será $\dfrac{n \cdot l \cdot a}{2}$.

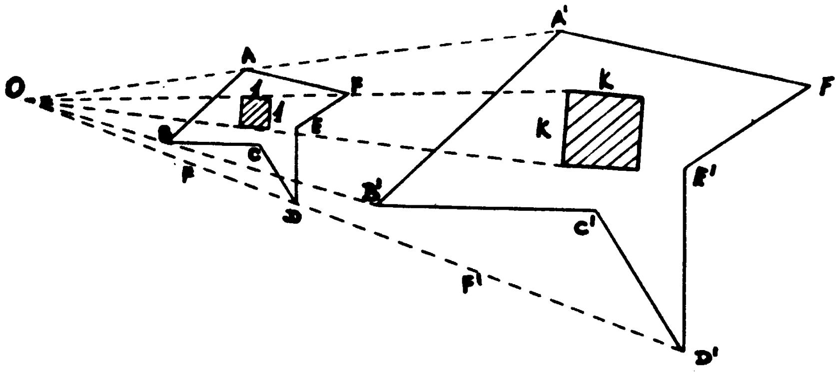
Esta fórmula se puede expresar también de la siguiente manera: el producto $n \cdot l$ es el perímetro P del polígono, esto es, la longitud del borde del polígono, entonces:

$$\text{Área del polígono regular} = \frac{n \cdot l \cdot a}{2} = \frac{P \cdot a}{2}$$

* * *

Ya hemos visto que el área de una figura se conserva cuando hacemos una transformación rígida cualquiera.

Veamos que pasa con una homotecia: supongamos que la figura F' es la imagen de F por una homotecia de razón k Un cuadrado unidad contenido en la figura F se transformará en un cuadrado de lado k contenido en F'



$\overline{OA'} = k\overline{OA}$

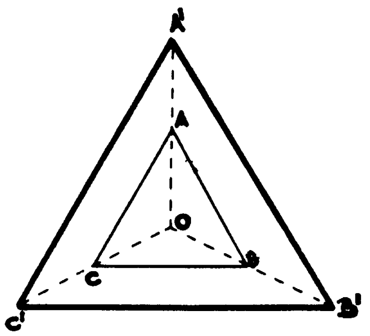
$\overline{OB'} = k\overline{OB}$

etc . . . , etc . . .

El área del cuadrado de lado k es k^2. Entonces, si A es el área de la figura F, en la figura F' caben $k^2 \times A$ cuadrados unitarios. Es decir, el área de F' es $k^2 \times A$.

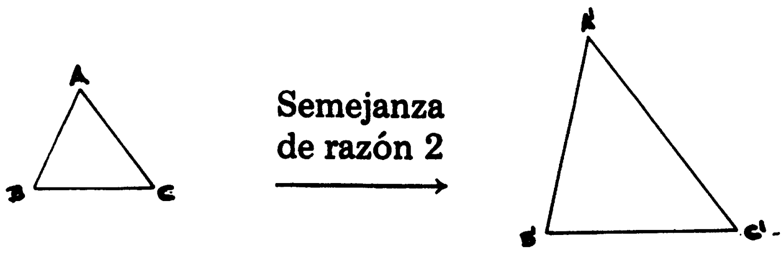
En resumen, una homotecia en el plano o en el espacio, de razón k, multiplica el área de cualquier figura por k^2, independientemente de cual sea el centro de homotecia y de que $k \lessgtr 1$, positivo o negativo.

Por ejemplo: el área del triángulo $A'B'C'$ es cuatro veces el área del triángulo ABC.



$\overline{OA'} = 2\,\overline{OA}$

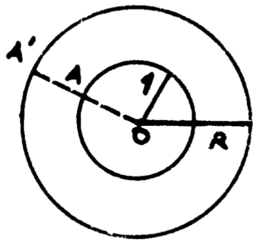
Una *semejanza* de razón k es el producto de una transformación rígida por una homotecia de razón k, entonces la semejanza también multiplica las áreas por k^2



$$\overline{A'B'} = 2\,\overline{AB}$$
$$\overline{B'C'} = 2\,\overline{BC}$$
$$\overline{C'A'} = 2\,\overline{CA}$$
$$\text{Área } (A'B'C') = 4 \times (\text{Área } ABC)$$

* * *

Queremos calcular ahora el área de un círculo. Primero observemos que un círculo de centro O y radio R, es la imagen de un círculo de centro O radio 1, por una homotecia de centro O y razón R.



$$\overline{OA'} = R\,\overline{OA}$$

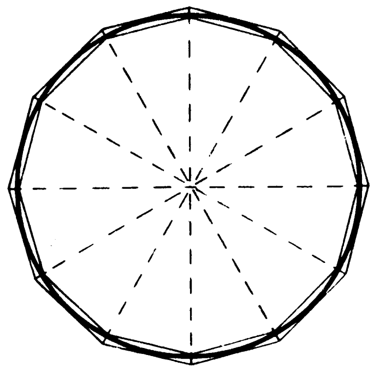
Entonces el área del círculo de radio R será R^2 veces el área del círculo de radio 1. Este número, el área del círculo de radio unidad, se llama π. Obtenemos la conocida fórmula πR^2 para el área del círculo.

Vamos a indicar cómo se calcula el número π, para esto vamos a seguir el método que ideó Arquímides en el siglo III a.C. Vamos a aproximar π con el área de polígonos inscritos y circunscritos a la circunferencia.

El área del círculo unidad siempre estará comprendida entre el área del polígono inscrito de n lados y el área del polígono circunscrito de n lados:

(área polígono inscrito de n lados) $< \pi <$ (área polígono circunscrito de n lados)

En la figura, se puede apreciar la diferencia entre el área del círculo y el área del dodecágono inscrito y dodecágono circunscrito.



A medida que tomamos polígonos de mayor número de lados obtenemos mejores aproximaciones de π.

Las áreas de los polígonos inscritos van creciendo hacia π, las áreas de los polígonos circunscritos van decreciendo hacia π.

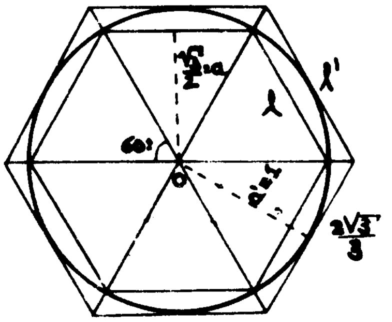
Se observa que π estará siempre, como un "sandwich" entre las áreas de los dos polígonos pero nunca será igual a una de ellas, por muy grande que sea el número de lados. π se obtiene como el *valor límite* de estas áreas cuando el número de lados, n, aumenta indefinidamente.

El concepto de *límite* es importantísimo en Matemáticas y se estudia en detalle en el curso MA1111. Esta idea de Arquímides lo convierte en precursor del Cálculo y de la matemática moderna. En realidad, él consideró polígonos de 6, 12, 48 y 96 lados y logró la siguiente aproximación de π :

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

Esto es en decimales: $3,140845\ldots < \pi < 3,285571\ldots$ La aproximación de Arquímedes da un error de menos de un milésimo
Como ilustración vamos a calcular el área de los hexágonos inscrito y circunscrito a una circunferencia de radio 1.

Como el ángulo central es de $60°$, el lado del hexágono inscrito es $l = R = 1$. Por el teorema de Pitágoras, obtenemos el apotema $a = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Entonces el área es $3\,a \cdot 1 = 3\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2,598$ aproximadamente.



El apotema a' del hexágono circunscrito es $a' = R = 1$, entonces por semejanza obtenemos $\dfrac{l'}{l} = \dfrac{a'}{a}$, es decir $\dfrac{l'}{1} = \dfrac{1}{a}$ luego el lado del hexágono circunscrito es $l' = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.

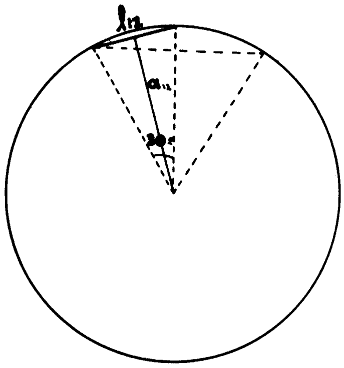
Finalmente obtenemos el área: $3\,a'l' = 2\sqrt{3} = 3,464$.

Entonces $2,598 < \pi < 3,464$.

Calculemos las áreas del dodecágono inscrito y circunscrito. Vamos a utilizar lo que sabemos de trigonometría.

Calculemos primero el lado del dodecágono inscrito l_{12}.

Por el teorema del coseno obtenemos: $l_{12}^2 = 1 + 1 - 2\cos 30 = 2 - \sqrt{3}$. Calculemos el apotema:

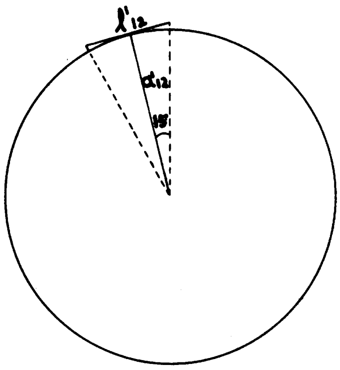


$$a_{12}^2 = 1 - \frac{l_{12}^2}{4} = 1 - \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

Entonces el área del dodecágono inscrito es

$$A_{12} = 12\frac{al}{2} = 6\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = 3\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 3$$

Calculemos ahora el lado y el apotema del dodecágono circunscrito.



$$a'_{12} = 1$$

$$\frac{l'_{12}}{2} = a'_{12}\ \mathrm{tg}\ 15^\circ;\ l'_{12} = 2\, tg\, 15^\circ$$

Finalmente obtenemos el área A'_{12}.

$A'_{12} = 6a'_{12}\, l'_{12} = 6 \cdot 2\ \mathrm{tg}\ 15^\circ = 3,2153$ aproximadamente. Entonces $3 < \pi < 3,2153$.

Como ejercicio usted puede calcular las áreas de los polígonos de 24, 48 y 96 lados inscritos y circunscritos a la circunferencia de radio unidad.

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

Calculemos ahora la longitud de una circunferencia de radio R. Para esto vamos a emplear un procedimiento de "paso al límite" muy semejante al usado para calcular el área del circulo. Consideremos un polígono inscrito y otro circunscrito a la circunferencia, del mismo número de lados. (Ver figura de la página 138). La longitud L, de la circunferencia está claramente comprendida entre el perímetro P_n del polígono inscrito y el perímetro del polígono circunscrito P'_n.

$$P_n < L < P'_n.$$

Consideremos sucesivamente polígonos con un número de lados cada vez mayor. Por ejemplo, polígonos de 6 lados, 12, 24, 48, 96, 192, etc., etc. En cualquier caso la longitud de la circunferencia está, como un "sandwich", entre el perímetro del polígono inscrito y el perímetro del polígono circunscrito. También el radio está entre la apotema del polígono inscrito y la del polígono circunscrito: $a_n < R < a'_n$.

A medida que el número de lados aumenta indefinidamente, los perímetros de ambos polígonos tienden a coincidir. También las apotemas. En el limite obtendremos la longitud L de la circunferencia y el radio R.

Por otra parte ya vimos que las áreas A y A' de ambos polígonos satisfacen la siguiente desigualdad cualquiera que sea el número de lados:

$$A_n = \frac{P_n a_n}{2} < \pi R^2 < \frac{P'_n a'_n}{2} = A'_n$$

A medida que aumenta el número de lados, A_n y A'_n se acercan a πR^2, los perímetros P_n y P'_n se acercan a L y las apotemas a_n y a'_n se acercan al radio R. En el "límite" esta desigualdad se convierte en la siguiente igualdad:

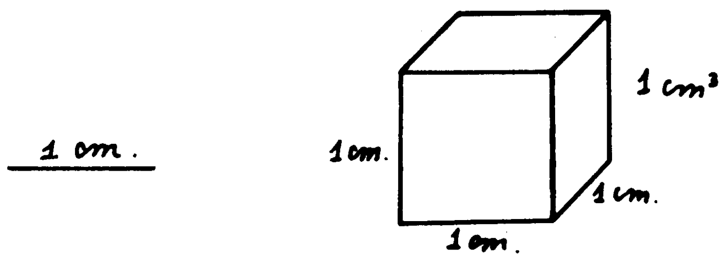
$$\frac{LR}{2} = \pi R^2 = \frac{LR}{2}$$

De aquí podemos despejar L : $L = 2\pi R$.

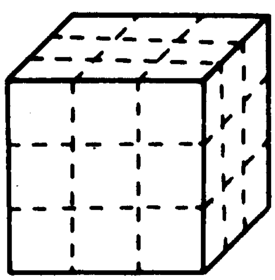
* * *

VOLUMENES

Una vez fijada la unidad de longitud, diremos que el volumen de un cubo de arista uno es la unidad de volumen.

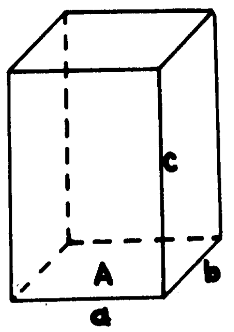


Calcular un volumen es averiguar cuántas veces cabe la unidad de volumen en un cuerpo.
Por ejemplo: el volumen de un cubo de arista 3 es 27



$V = 3^3 = 27$

El volumen del paralelepípedo recto de aristas a, b y c, es abc. También podemos decir que este volumen es el área de la base por la altura



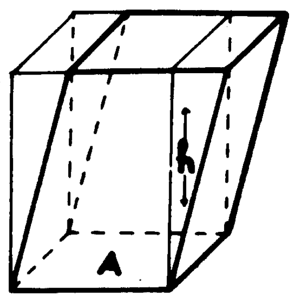
$V = abc = Ac$

$V = Ac$

* * *

Igual que el caso de las áreas, dos cuerpos congruentes tienen igual volumen. Congruentes significa que uno se obtiene del otro por una transformación rígida. Esto es claro, porque la transformación rígida transforma un cubo unidad en otro cubo unidad.

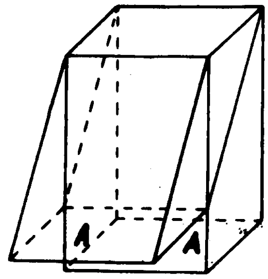
Calculemos el volumen de un paralelepípedo que no sea recto, como el de la figura.



$V = Ah$

Trazando planos perpendiculares a la base por dos aristas opuestas, obtenemos dos prismas congruentes (figura anterior). Luego los dos prismas tienen igual volumen. El volumen del paralelepípedo original es entonces igual al volumen del paralelepípedo recto obtenido. El área de base y la altura de ambos también son iguales (¿por qué?), luego $V = Ah$.

El paralelepípedo anterior es un caso particular ya que dos de sus caras opuestas son perpendiculares a la base. En el caso más general, podemos proceder de manera análoga al anterior. Tracemos cuatro planos perpendiculares a la base, que pasen por las cuatro aristas superiores. Obtenemos un paralelepípedo recto.

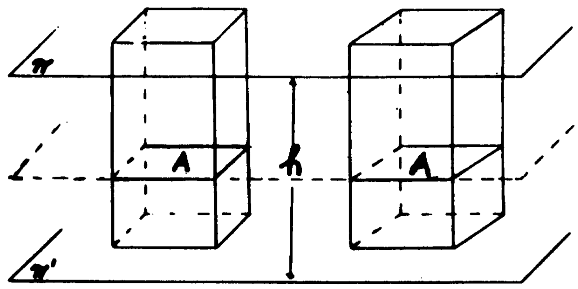


$V = Ah$

Para probar que ambos paralelepípedos tienen el mismo volumen, podríamos descomponer la figura en suma de poliedros y ver que las partes sobrantes en uno y otro paralelepípedo, están formadas por poliedros congruentes. Este procedimiento, aunque es viable, tiene varios inconvenientes: la descomposición en suma de poliedros y las congruencias de éstos no se pueden especificar en forma general. Para cada paralelepípedo deberíamos obtener una descomposición particular y luego analizar los poliedros obtenidos para ver cuáles de ellos son congruentes. Es conveniente que usted mismo haga esta descomposición en el caso de la figura anterior.

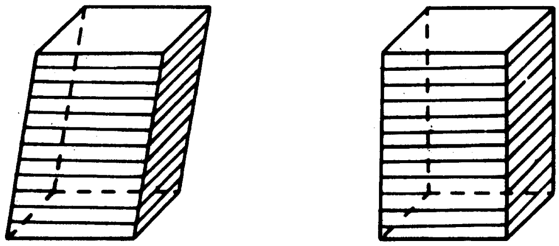
El método general que quisiéramos hallar está dado por el siguiente teorema, que también se basa en un proceso de limite.

PRINCIPIO DE CAVALLIERI. Supongamos que dos sólidos están situados entre dos planos paralelos (tienen la misma altura) y que cualquier otro plano, paralelo a ellos, corta a los dos sólidos en secciones que tienen igual área. Entonces los dos sólidos tienen igual volumen.



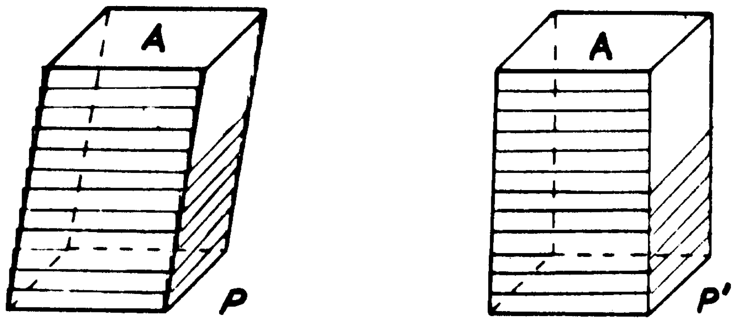
La demostración del Principio de Cavallieri, requiere un proceso de "paso al limite" y un proceso de "sumar" una infinidad de volúmenes que son arbitrariamente pequeños. Estos procesos son estudiados en detalle en los cursos de Cálculo (MA1111 y MA1112). Daremos una idea de la demostración para el caso de los Paralelepípedos.

Vamos a cortar ambos paralelepípedos P y P' en rebanadas, por planos *paralelos al plano* π.



P P'

Las rebanadas que forma el paralelepípedo oblicuo P son a su vez paralelepípedos oblicuos, de altura muy pequeña. El volumen de P es la suma de todos estos volúmenes. Si considerásemos cada rebanada como un paralelepipedo recto obtendríamos un error, en el volumen total, relativamente pequeño.



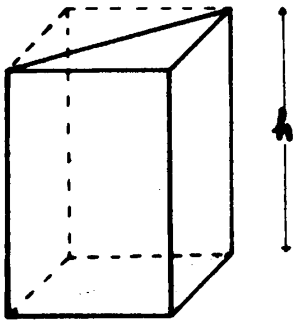
Cada rebanada tiene, en este caso, igual volumen a su correspondiente en el paralelepípedo recto P', ya que ambas tienen igual área de base e igual altura. La aproximación obtenida del volumen de P será tanto mejor mientras más delgadas sean las rebanadas, pero la suma de los volúmenes de ellas es siempre constante, igual al volumen del paralelepípedo recto P'. Tomando rebanadas arbitrariamente delgadas llegamos a la conclusión de que la diferencia entre ambos volúmenes es arbitrariamente pequeña. Esto es, $V - V'$ es menor que cualquier número que hayamos escogido de antemano, por pequeño que sea ese número. Ante esta situación lo único que puede ocurrir es que ambos volúmenes sean iguales: $V = V'$. Entonces el volumen del paralelepípedo oblicuo P es el producto del área de su base por su altura:

$$V = V' = A \cdot h$$

***

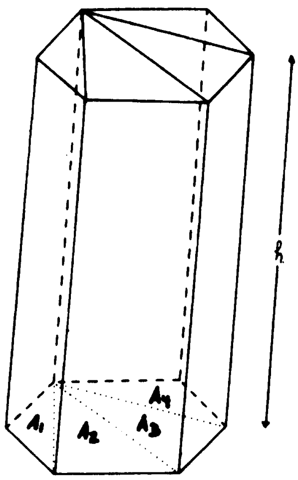
Ahora que sabemos calcular el volumen de un paralelepípedo cualquiera, vamos a calcular el volumen de un prisma triangular. Un prisma triangular es exactamente la mitad de un paralelepípedo.

Observe que el área de la base del prisma triangular es también la mitad del área de base del paralelepípedo, entonces su volumen será el producto del área de base por su altura:



$$V = A \cdot h.$$

El volumen de un prisma de base poligonal cualquiera, se puede calcular descomponiéndolo en suma de prismas triangulares. Cada prisma triangular tiene volumen $V_i = A_i h$. Como la suma de las áreas de todos los triángulos de base es el área del polígono, obtenemos:

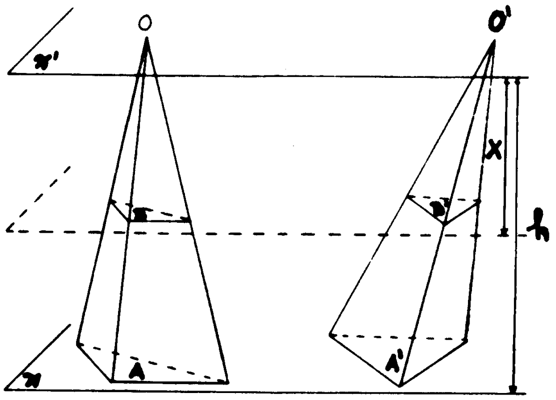


$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \\ &= A_1 h + A_2 h + A_3 h + A_4 h = A \cdot h \end{aligned}$$

Entonces el volumen de un prisma cualquiera es el producto del área de su base por su altura: $V = Ah$.

El próximo volumen que vamos a calcular es el de una pirámide de base triangular (tetraedro). Para esto vamos a utilizar otra vez el principio de Cavallieri, en la siguiente forma:

TEOREMA 15. *Dos pirámides triangulares que tengan igual área de base e igual altura, tienen el mismo volumen.*



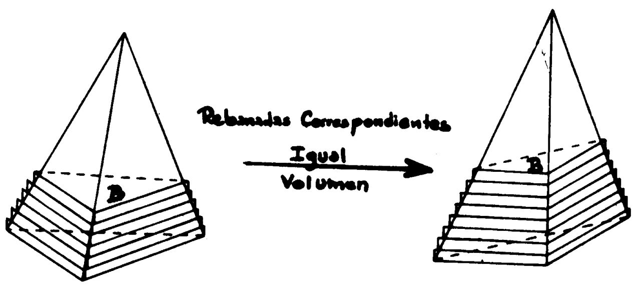
Podemos suponer que las dos pirámides están comprendidas entre dos planos paralelos π y π' a distancia h.

Las áreas de base son iguales $A = A'$. Para usar el principio de Cavallieri debemos probar que las áreas de las secciones producidas al cortar con otro plano, paralelo a los anteriores, son iguales.

Cortemos con un plano a distancia x del plano π'. Debemos probar que $B = B'$. Observemos que el área B es la imagen del área A por una homotecia de centro O y razón $\dfrac{x}{h}$. Igualmente el área B' es la imagen del área A' por homotecia de centro O' y razón $\dfrac{x}{h}$ (ver figura anterior).

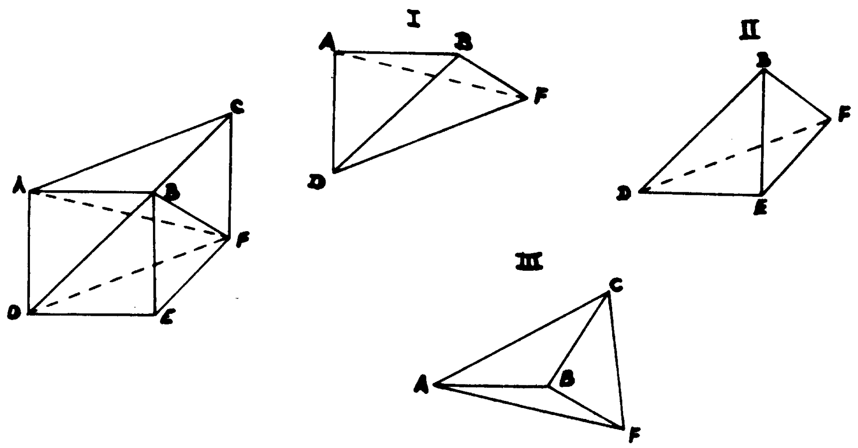
Entonces $B = \left(\dfrac{x}{h}\right)^2 A$ y $B' = \left(\dfrac{x}{h}\right)^2 A'$, como $A = A'$ obtenemos que $B = B'$, cualquiera que sea la distancia x. Se cumplen las condiciones del principio de Cavallieri, ambas pirámides deben tener igual volumen.

Dicho de otra manera. Cortemos las pirámides en rebanadas muy delgadas y consideremos cada rebanada como un prisma triangular de altura muy pequeña.



Rebanadas correspondientes tienen igual volumen ya que son prismas triangulares de la misma base y altura, luego las sumas de los volúmenes de todas las rebanadas son iguales en una y otra pirámide. Considerando rebanadas más y más delgadas obtendremos, en el limite, que ambas pirámides tienen igual volumen.

Ahora podemos calcular el volumen de una pirámide de base triangular. Para esto vamos a utilizar el siguiente truco: un prisma triangular se puede cortar en tres pirámides triangulares.

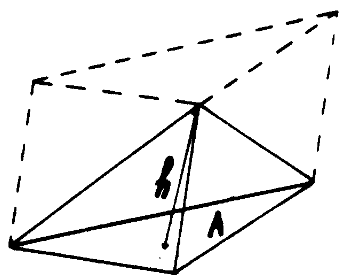


Las tres pirámides obtenidas tienen igual volumen:

1. I y II tienen igual volumen, ya que $\Delta ABD \cong \Delta BDE$ y la altura, que es la distancia de F al plano ABD es la misma.
2. II y III tienen igual volumen, ya que $\Delta BEF \cong \Delta BCF$ y la altura común es la distancia de la recta AD al plano de estos dos triángulos.

Resulta entonces que el volumen de cada una de estas tres pirámides es igual a la tercera parte del volumen del prisma.

Supongamos ahora que tenemos una pirámide triangular cualquiera, de base A y altura h. Podemos completarla en un prisma triangular, con la misma base y altura. Entonces el volumen de la pirámide será la tercera parte del volumen del prisma, esto es:

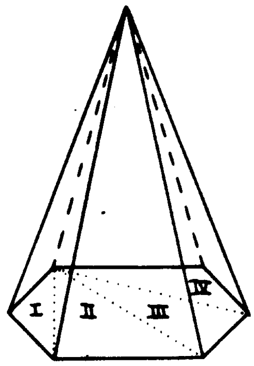


$$V = \frac{1}{3} A \cdot h$$

Ahora estamos en condiciones de calcular el volumen de casi cualquier poliedro, bastará descomponerlo en prismas o pirámides triangulares.

Veamos algunos ejemplos:

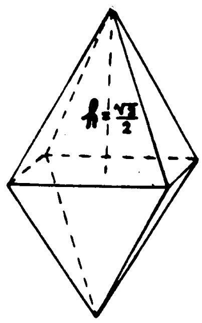
1. Volumen de una pirámide cualquiera: Una pirámide de base hexagonal, por ejemplo, se descompone en suma de cuatro pirámides de base triangular su volumen será:



$$V = \frac{1}{3} A \cdot h$$

ya que la suma de las áreas de los cuatro triángulos es igual al área del hexágono.

2. Volumen de un octaedro regular de arista 1. El octaedro es la suma de dos pirámides de base cuadrada y altura $\frac{\sqrt{2}}{2}$



Luego su volumen es:
$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

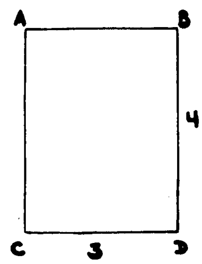
* * *

BIBLIOGRAFÍA

Puig Adam: *Geometría Métrica.* Vol. 1.

EJERCICIOS

1. Dado un rectángulo de base 3 y altura 4, calcule el área de la imagen de ese rectángulo por una homotecia de centro A y razón 3. R: 27



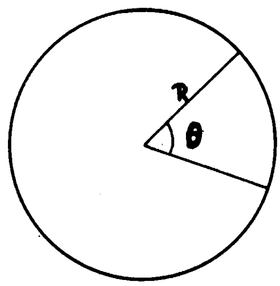
El mismo problema

con una homotecia

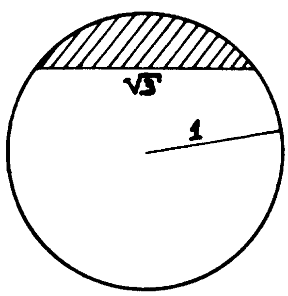
de centro A y razón $\left(-\frac{1}{4{,}5}\right)$.

R: 141,75

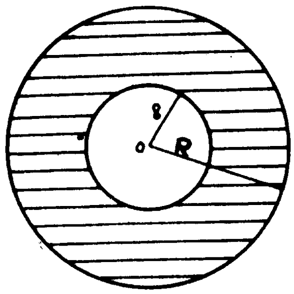
2. Cuánto vale el cociente de las áreas de dos pentadecágonos regulares de lados a y b respectivamente. R: $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2$
3. Dada una circunferencia de radio 1, calcule el área de un polígono regular de 96 lados inscrito en la circunferencia. Lo mismo para un polígono de 96 lados circunscrito.
4. Calcule el área de la superficie de un dodecaedro regular de arista 1. El mismo problema para un icosaedro regular de arista 1. R: 90,82 y $5\sqrt{3}$
5. *a*) Calcule el área de un sector circular de ángulo θ y radio R. R: $A = \frac{\theta R^2}{2}$; θ en radianes.



   b) El mismo problema con $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $R = 2$ y con $\theta = 15°35'16,2''$ y $R = 7$. R: $\frac{2}{3} : \pi$
6. Calcule el área rayada en la figura R: $\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

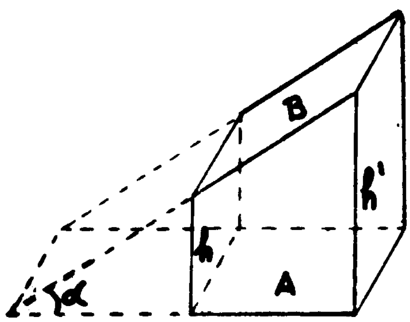


7. Sabiendo que el área de la corona circular de la figura es 4, calcule el área de otra corona circular de radios R y 16.

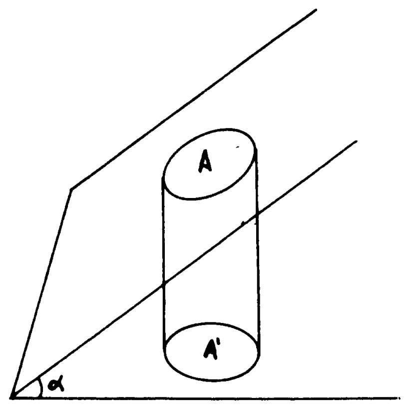


R. 598 aprox.

8. Calcule el área de la cara de una tuerca hexagonal de lado 2 cm. Sabiendo que el tornillo tiene un diámetro de 1 cm. R: $6\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$
9. Corte un cubo de arista a con un plano, de manera que la sección sea un hexágono regular. Calcule el área de ese hexágono. Calcule el volumen de los dos poliedros en que queda dividido el cubo. $A = \frac{1}{4}(3\sqrt{6}a^2) \quad V = \frac{a^3}{2}$
10. Calcule el volumen de un tetraedro regular sabiendo que su arista mide 2 cm.
11. Pruebe que si dos poliedros P y P' son semejantes, siendo k la razón de la semejanza entonces la razón entre los volúmenes es $\dfrac{V'}{V} = k^3$.
12. Calcule el volumen de un tetraedro regular de arista 5 cm. (ver ejercicio 10).
13. Un paralelepípedo recto se corta con un plano que forma un ángulo α con el plano de la base. Pruebe que el área de la base A es $A = B\cos\alpha$. Halle el volumen del poliedro obtenido.



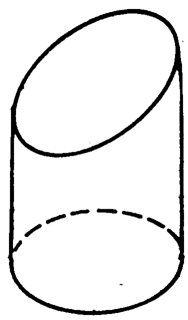
14. Se proyecta una figura plana de área A ortogonalmente sobre otro plano π, que forma un ángulo α con el plano de la figura. Pruebe que el área de la proyección es $A' = A\cos\alpha$.



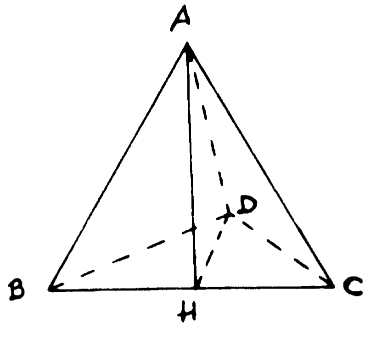
15. Al cortar un cilindro con un plano que forma un ángulo de $30°$ con la base del cilindro, se obtiene una sección, llamada elipse.

    Calcule el área de esa elipse, si el radio del cilindro es 2.

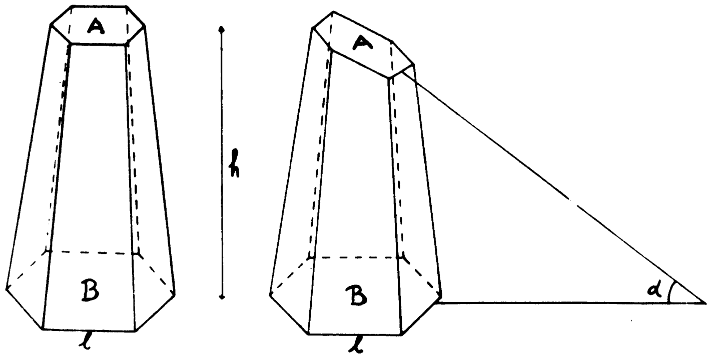
    (En otro capítulo estudiaremos esta curva con más detalle).



16. Dado un tetraedro regular, de arista a, calcule el área del triángulo AHD si AH es la altura del triángulo ABC.



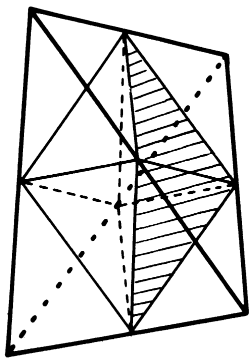
17. Calcule el volumen de los dos troncos de pirámides de las figuras de abajo. (Los hexágonos de base son regulares).



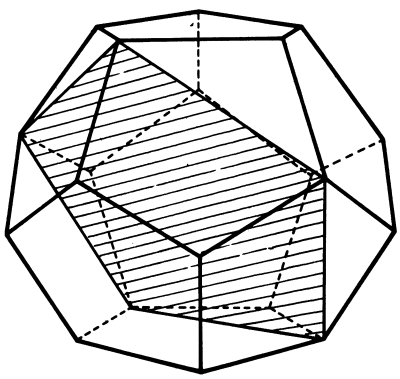
18. Probar que el área de todo triángulo inscrito en una circunferencia es el producto de sus tres lados dividido por el doble del diámetro de la circunferencia.

    (*Ayuda:* Pruebe primero que en un triángulo inscrito en una circunferencia, el producto de dos lados cualesquiera es igual al producto de la altura sobre el tercer lado por el diámetro de la circunferencia).

19. Uniendo los centros de las aristas de un tetraedro regular se obtiene un octaedro regular. Determinar el volumen del octaedro si la arista del tetraedro es a.



20. Sea el dodecaedro mostrado en la figura cuya arista es l. Calcular el área de la figura marcada.



NOTAS

1. Arquímedes nació en Siracusa, Sicilia, en el año 287 a.C.

   Se sabe que durante su juventud pasó algún tiempo en Egipto, en Alejandría, que era el principal centro de la cultura helénica en esa época. Allí funcionaba la escuela de geometría más importante de toda Grecia que había sido fundada por Euclides en la época de Ptolomeo I (383-306 a.C.).

   Cuando Arquímedes visita a Alejandría ya Euclides había muerto. Estudio allí con un astrónomo y geómetra llamado Conon de Samos, también conoció y fue amigo de Eratóstenes. A ellos dedicó algunos de sus trabajos posteriores.

   Arquímedes debe haber pasado poco tiempo en Egipto. Vivió durante toda su madurez en su ciudad natal, Siracusa, al servicio del rey Hierón. Bajo la protección del rey realizó casi toda su obra científica que incluye los siguientes libros: *Sobre la Esfera* y *el Cilindro, La medida del Circulo, Sobre los Conoides y Esferoides, Sobre las Espirales, Sobre el equilibrio de los Planos, Sobre los Cuerpos Flotantes.* Además de su obra científica realizó importantes trabajos de ingeniería para el rey Hierón, que nunca publicó pues los consideraba sórdidos e innobles. Estos trabajos incluían, además de una gran cantidad de máquinas de guerra para la defensa de Siracusa, una bomba de agua diseñada como un tornillo para extraer agua de riego y un modelo del sistema solar hecho con esferas de vidrio, que permitía predecir eclipses de sol y de luna. Este modelo fue visto y descrito por Cicerón más de doscientos años más tarde. El ingenio y la complejidad de sus obras de ingeniería le dieron fama y renombre en su época, convirtiéndolo en una leyenda viviente. Se cuenta, por ejemplo, que pudo destruir la flota Romana que sitiaba a Siracusa quemando los barcos con un sistema de lentes que concentraba gran cantidad de rayos solares. Más verosímil es la anécdota de la corona de Hierón: pesando esta corona en el aire y luego sumergida en agua, logró determinar la proporción de oro y de plata que tenía la corona, comparando los pesos específicos de estos dos metales.

   A pesar de su enorme fama y a pesar de las órdenes dadas para que sus soldados no le hicieran daño por el general romano Marcelo, quién dirigía el sitio de Siracusa, Arquímedes no pudo escapar de la habitual brutalidad militar y fue asesinado por los soldados romanos en el saqueo de Siracusa, 213 A.C.

2. La obra científica de Arquímedes lo acredita como el hombre de ciencia más importante de la antigüedad. Sus trabajos: Sobre el Cilindro y la Esfera y Sobre la Medida del Círculo contienen el germen de lo que hoy llamamos Cálculo Integral que sería desarrollado por Newton en el

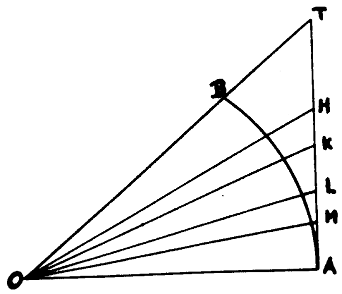
siglo XVII, 20 siglos más tarde. La medida del Círculo contiene el cálculo de π a que hemos hecho referencia en esta guía. Sin embargo el método que hemos seguido no es exactamente el mismo seguido por Arquímedes.

Él logra la aproximación de π, cuando mide la longitud de la circunferencia, no el área del circulo. Tampoco utiliza él la trigonometría ni el cálculo de raíces, pues los griegos no tenían estas herramientas. A continuación transcribimos los cálculos hechos por Arquímedes, y algunos comentarios tomados de la "*Monografía sobre π y e*" por F.J. Duarte (Boletín de la Academia de Ciencias Física, Matemáticas y Naturales. Caracas 1948).

3. "Vamos ahora a exponer el cálculo completo de que se sirvió Arquímedes para hallar los límites superior e inferior de π ya mencionados. El gran geómetra no indica en su *Medida del Círculo* el método que empleó para extraer las raíces cuadradas que allí figuran. El historiador y matemático danés H.G. Zeuthen emite la hipótesis de que quizás lo hiciera por medio de operaciones equivalentes a las desigualdades
$$a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}.$$
"Así, los límites que obtuvo Arquímedes para $\sqrt{3}$, a saber
$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$
se deducen de las desigualdades antes escritas partiendo de la aproximación $26/15$, o mejor, del valor 26 que es aproximadamente igual $15\sqrt{3}$, puesto que
$$\left(15\sqrt{3}\right)^2 = 675 = 26^2 - 1;$$
lo cual se comprueba haciendo $a = 26,\ \ b = 1$ en las desigualdades precedentes. En efecto, se halla:
$$26 - \frac{1}{52} > 15\sqrt{3} > 26 - \frac{1}{51}$$
de donde resultan los límites indicados por Arquímedes para $\sqrt{3}$.

"También es digno de notar, como lo ha hecho De Lagny, que los límites superior e inferior de $\sqrt{3}$ dados por Arquímedes se hallan por la teoría de las fracciones continuas que suministran las fracciones racionales más simples y más próximas de aquella raíz. La elección tan sagaz de los números más ventajosos hecha por Arquímedes, en una época en que se ignoraba esa teoría, no puede ser simple efecto del azar y es una nueva razón para admirar -dice Montucla- el genio de ese gran hombre.

4. ″Cálculos de Arquímedes. Sea $TOA = 30°$ (ver figura)



O el centro del circulo y OA su radio.

"Tendremos:

$$\frac{OA}{AT} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

"Pero $3 \cdot 153^2 = 70227 = 265^2 + 2$;
luego $\dfrac{OA}{AT} > \dfrac{265}{153}$.
"Se tiene $\dfrac{OT}{AT} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{306}{153}$.
"Sea OH la bisectriz de AOT; se deduce:

$$\frac{OT}{AT} = \frac{TH}{HA};$$

luego:

$$\frac{OT + OA}{AT} = \frac{OA}{AH}$$

y por tanto

$$\frac{OA}{AH} > \frac{571}{153}.$$

"Se deduce:

$$\frac{\overline{OA}^2 + \overline{AH}^2}{\overline{AH}^2} > \frac{349450}{153^2}$$

y

$$\frac{OH}{AH} > \frac{59 + \frac{1}{8}}{153}$$

″Dividamos el ángulo AOH en dos ángulos iguales por medio de la recta OK. Se tendrá:

$$\frac{OH}{OA} = \frac{HK}{KA} : \ \frac{OH + OA}{HA} = \frac{OA}{KA}$$

de donde

$$\frac{OA}{KA} > \frac{1162 + \frac{1}{8}}{153}$$

"Elevando al cuadrado ambos miembros de esta desigualdad y agregando 1 a cada uno, viene extrayendo la raíz cuadrada del resultado

$$\frac{OA}{KA} > \frac{1172 + \frac{1}{8}}{153}$$

"Sea OL bisectriz del ángulo KOA; tendremos:

$$\frac{OK}{OA} = \frac{KL}{LA}; \left|\frac{OK + OA}{KA} = \frac{OA}{LA}\right|$$

luego, teniendo en cuenta las desigualdades precedentes:

$$\frac{OA}{LA} > \frac{2334 + \frac{1}{4}}{153}$$

"Procediendo como antes, es decir, elevando al cuadrado ambos miembros, añadiendo 1 y extrayendo la raíz cuadrada:

$$\frac{OL}{LA} > \frac{2339 + \frac{1}{4}}{153}$$

"Se divide el ángulo LOA en dos iguales por medio de la recta OM. Se tendrá:

$$\frac{LO}{OA} = \frac{LM}{MA}; \ \frac{LO + OA}{LA} = \frac{OA}{MA}$$

luego teniendo en cuenta las desigualdades precedentes:

$$\frac{OA}{MA} > \frac{4673 + \frac{1}{2}}{153}$$

"Ahora, puesto que el ángulo TOA que es un tercio del ángulo recto, se ha dividido cuatro veces en dos partes iguales, el ángulo MOA será $1/48$ del ángulo recto y la recta MA será la mitad del lado del polígono de 96 lados circunscrito al círculo. Ahora, si se designa por D el diámetro del círculo será

$$D = 2\,\overline{OA}$$

luego

$$\frac{D}{2\,\overline{MA}} = \frac{OA}{MA} > \frac{4678 + \frac{1}{2}}{153}$$

"Dividiendo ambos miembros por 96 y designando por P el perímetro del polígono circunscrito de 96 lados, viene

$$\frac{D}{P} > \frac{4673 + \frac{1}{2}}{14688}$$

"Pero

$$\frac{14688}{4673 + \frac{1}{2}} = 3 + \frac{667 + \frac{1}{2}}{4673 + \frac{1}{2}} < 3 + \frac{1}{7}$$

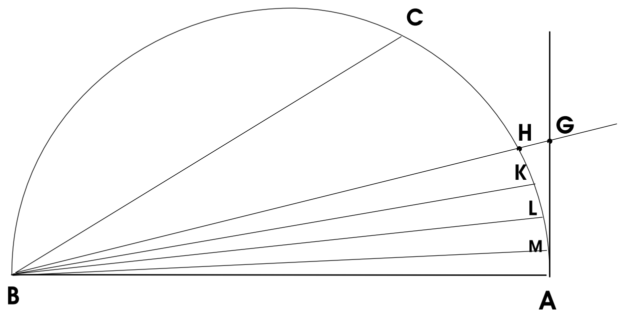
"Luego

$$P < D\left(3 + \frac{1}{7}\right)$$

y a fortiori: circunferencia de círculo $< D\left(3 + \frac{1}{7}\right)$

"Sea ahora un círculo de centro O y de diámetro AB (ver figura abajo como una ayuda visual ya que no está escala). Sea ABC igual a un tercio de ángulo recto. AC será pues el lado del exágono inscrito.

"Luego, $\dfrac{BC}{CA} = \dfrac{\sqrt{3}}{1}$



"Pero

$$3 \times 780^2 = 1825200 = 1251^2 - 1$$

luego

$$\frac{BC}{CA} < \frac{1351}{780}$$

"Ahora,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{2}{1} = \frac{1560}{780}$$

"Sea BH la bisectriz del ángulo ABC. Los triángulos AHB, AHG son equiángulos; luego

$$\frac{BH}{HA} = \frac{AH}{GH} = \frac{AB}{GA}.$$

"Se tiene además:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GC};\ \frac{AB}{AB+BC} = \frac{AG}{AG+GC};\ \frac{AB}{AG} = \frac{AB+BC}{AC}$$

"Luego,

$$\frac{BH}{HA} < \frac{2911}{780}$$

" Elevando al cuadrado ambos miembros, agregando 1 y extrayendo la raíz cuadrada, viene:

$$\frac{AB}{HA} < \frac{3013 + \frac{3}{4}}{780}$$

"Sea BK la bisectriz del ángulo ABH; se tendrá:

$$\frac{BK}{KA} = \frac{AB+BH}{HA} < \frac{5923+\frac{3}{4}}{780}$$

o, multiplicando ambos términos del quebrado por $\frac{4}{13}$, se tendría:

$$\frac{BK}{KA} < \frac{1823}{240}$$

"Elevando al cuadrado, agregando 1 y extrayendo la raíz cuadrada, se obtiene:

$$\frac{BA}{KA} < \frac{1838+\frac{9}{11}}{240}$$

"Tracemos ahora BL bisectriz del ángulo ABK. Se tendrá de igual modo teniendo en cuenta las desigualdades precedentes:

$$\frac{BL}{LA} = \frac{AB+BK}{KA} < \frac{3661+\frac{9}{11}}{240}$$

o, multiplicando los dos términos del quebrado por $\frac{11}{40}$:

$$\frac{BL}{LA} < \frac{1007}{66}$$

" Elevando al cuadrado ambos miembros, agregando 1 y extrayendo la raíz cuadrada, viene:

$$\frac{BA}{LA} < \frac{1009+\frac{1}{6}}{66}$$

"Sea ahora BM la bisectriz de ABL. Se tiene, teniendo presente las desigualdades precedentes:

$$\frac{BM}{MA} = \frac{AB+BL}{LA} < \frac{2016+\frac{1}{6}}{66}$$

" Elevando al cuadrado, añadiendo 1 y extrayendo la raíz cuadrada, se tiene:

$$\frac{AB}{MA} < \frac{2017+\frac{1}{6}}{66}$$

o invirtiendo

$$\frac{MA}{AB} > \frac{66}{2017+\frac{1}{6}}$$

"Designando ahora por P' el perímetro del polígono de 96 lados inscrito en el círculo, será

$$P' = 96 \times \overline{AM}.$$

"Luego

$$\frac{P'}{D} > \frac{6336}{2017+\frac{1}{6}}$$

"Pero

$$\frac{6336}{2017+\frac{1}{6}} > \frac{223}{71}$$

y a fortiori:

$$\frac{P'}{D} > \frac{223}{71}$$

es decir

$$P' > D\left(3+\frac{10}{71}\right)$$

"Luego, a fortiori:

Circunferencia del círculo $> \left(3+\dfrac{10}{71}\right) D.''$

AUTOEVALUACIÓN

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA-1511—Autoevaluación de los capítulos 6 al 10—

Sus respuestas las puede verificar en el Apéndice, en la página 344.

1. El número de rectas en el plano (o en el espacio) que determinan n puntos no alineados tres a tres es:
   - A n
   - B $n(n-1)(n-2)/6$
   - C $n(n+1)/2$
   - D $n(n-1)/2$
   - E $n(n-1)$
   - F ¡Ninguna!

2. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de las aristas de un ángulo triedro?
   - A Un punto
   - B Una semi-recta
   - C Un triángulo equilátero
   - D Tres circulos en el espacio
   - E Tres planos
   - F ¡Ninguna!

3. La suma de los ángulos internos de un polígono convexo cualquiera de n lados es:
   - A $(n-2)\pi$
   - B $(n-1)\pi$
   - C $n\pi$
   - D $(n+1)\pi$
   - E $(n+2)\pi$
   - F ¡Ninguna!

4. Un cubo puede cortarse con un plano de manera que la sección sea un hexágono regular. Halle el área de dicho exágono si la arista del cubo mide 1cm.
   - A 1cm^2
   - B $\frac{3}{2}\text{cm}^2$
   - C $\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$
   - D $\frac{3\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$
   - E $\frac{3\sqrt{2}}{2}\text{cm}^2$
   - F ¡Ninguna!

5. ¿Cuántos planos de simetría tiene el cubo?
   - A 2
   - B 4
   - C 6
   - D 7
   - E 9
   - F ¡Ninguna!

6. Considere dos planos en el espacio P_1 y P_2 perpendiculares que se intersectan en la recta L. El producto de las dos simetrías respecto a esos planos es:

A	Rotación de $\pi/2$ radianes alrededor de L.
B	La simetría respecto a P_2
C	Rotación de $\pi/4$ radianes alrededor de L
D	La simetría respecto a P_1.
E	Rotación de π radianes alrededor de L
F	¡Ninguna!

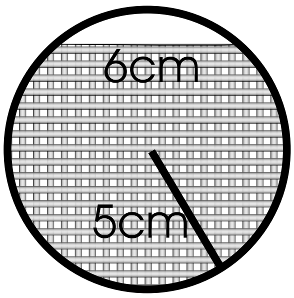
7. El número total de simetrías a lo largo de rectas que dejan invariante el pentágono regular es:

A	B	C	D	E	F
5	10	15	20	25	¡Ninguna!

8. Diga cuál de los siguientes pares de poliedros regulares **no son duales** entre sí,

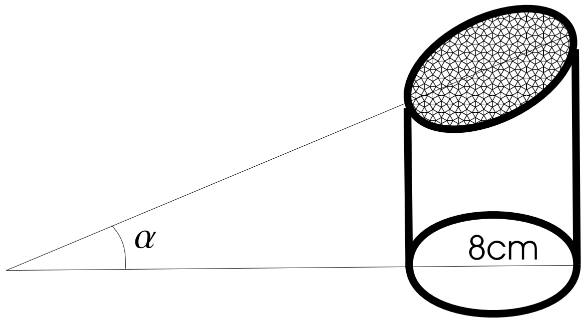
A	Cubo y octaedro
B	Tetraedro y tetraedro
C	Icosaedro y dodecaedro
D	Cubo y dodecaedro
E	Dodecaedro e icosaedro
F	¡Ninguna!

9. El área rayada A en la figura, al expresarla en centímetros cuadrados se encuentra en el intervalo:



A	B	C	D	E	F
[45;48)	[48;50)	[50;52)	[52;55)	[55;58)	¡Ninguna!

10. Al cortar un cilindro recto de 8 centímetros de diametro, con un plano que forma un ángulo α de $25°$ con la base del cilindro se obtiene una elipse (sombreada en la figura). Entonces el área A de la elípse expresada en centímetros cuadrados se encuentra en el intervalo:



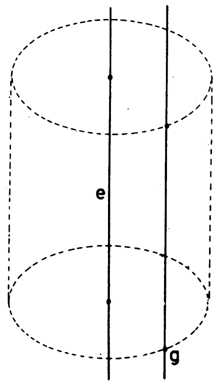
A	[45;48)	B	[48;50)	C	[50;52)	D	[52;55)	E	[55;58)
F	¡Ninguna!								

CAPíTULO 11

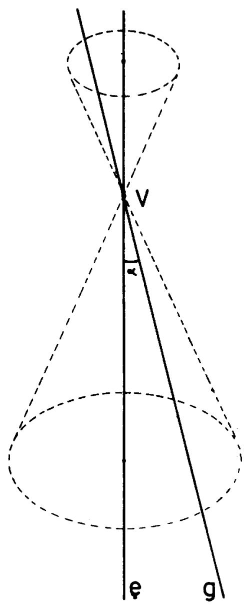
LOS CUERPOS REDONDOS

En este capítulo vamos a estudiar tres cuerpos en el espacio: el cilindro, el cono y la esfera.

Supongamos que tenemos dos rectas paralelas en el espacio, e y g. Dejando fija a la recta e y haciendo girar la recta g alrededor de e, obtenemos una superficie llamada *superficie cilíndrica.* Es la superficie barrida por la recta g al girar. La recta e se llama *eje* y la recta g se llama *generatriz.*



Supongamos ahora que las dos rectas e y g no son paralelas, y que se cortan en un punto V según un ángulo $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

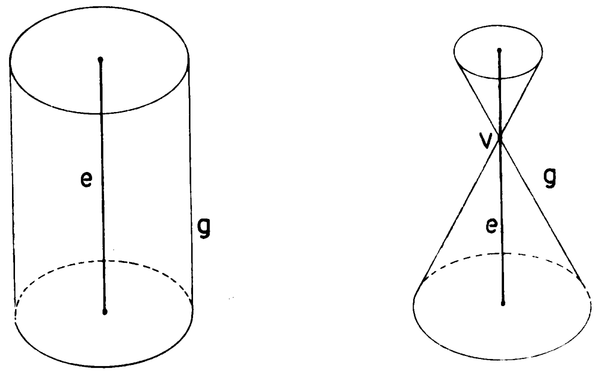


Al hacer girar la recta g alrededor del eje e, genera una superficie cónica. La *superficie cónica* es la superficie barrida por g al girar alrededor de e. g se llama *generatriz*, e es el *eje*, V es el vértice y α es el *ángulo* de la superficie cónica.

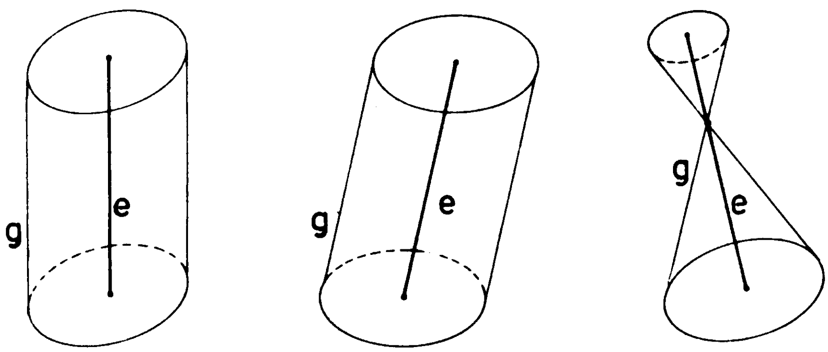
Las superficies que se pueden obtener haciendo girar una recta (o una curva) alrededor de un eje, se llaman superficies de revolución.

Obviamente la superficie cilíndrica y la superficie cónica son ilimitadas. Si las limitamos cortándolas con dos planos paralelos, obtenemos cuerpos en el espacio llamados cilindro y cono respectivamente.

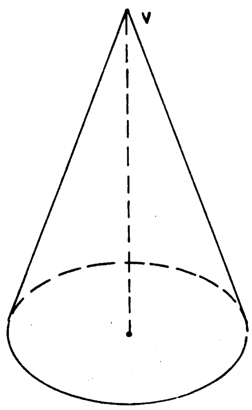
Si los planos son perpendiculares al eje, el cuerpo se llama cilindro recto o cono recto.



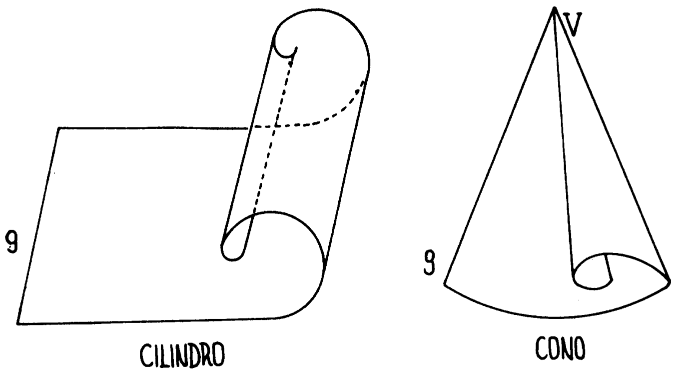
Si los planos no son perpendiculares al eje, los cuerpos se llaman cilindro oblicuo y cono oblicuo.



Frecuentemente llamaremos cono a una sola de las dos partes del cono. Esto es, el cuerpo limitado por la superficie cónica, el vértice y un plano que corte al eje.

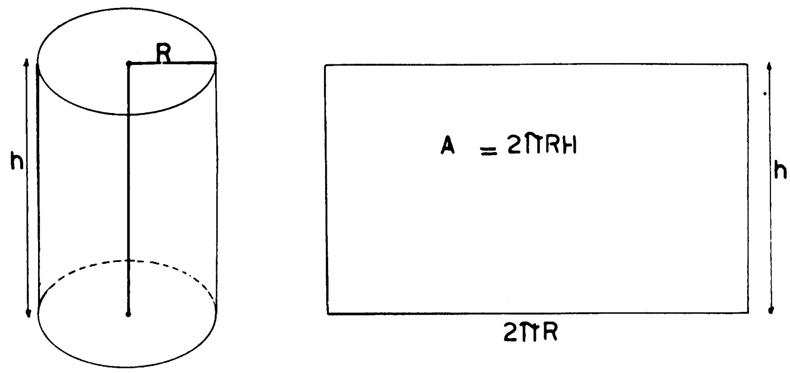


Las superficies cónicas y cilíndricas gozan de una propiedad que va a simplificar mucho su estudio: cortando la superficie lateral de un cilindro recto, o de un cono recto, a lo largo de una generatriz, podemos desenrollar la superficie sobre un plano.



De esta manera podemos calcular el área de la superficie lateral de ambos.

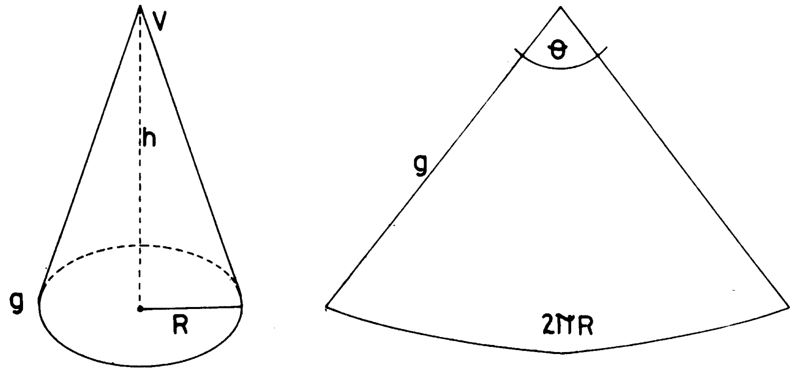
En el caso del cilindro recto, de altura h y radio R obtenemos, al desenrollar, un rectángulo de altura h y base $2\pi R$.



Luego el área lateral es $A = 2\pi R \cdot h$. El área total del cilindro será entonces $2\pi Rh + 2\pi\ \ R^2$.

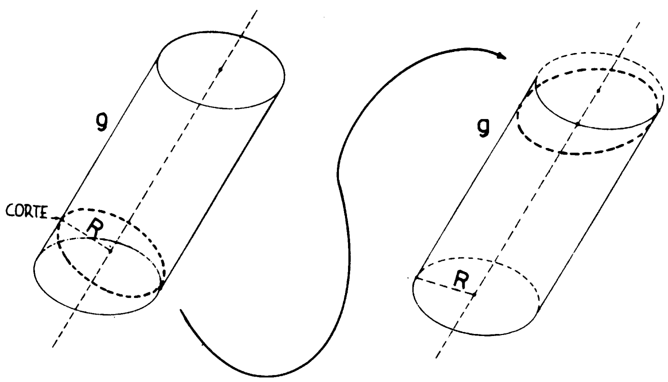
En el caso de un cono recto obtenemos, al desenrollar, un sector circular de radio g cuya longitud de arco es $2\pi R$. Queremos hallar el área de este sector circular, para esto veamos cuantas veces cabe el ángulo θ en 2π radianes: $\dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{2\pi R}{2\pi g} = \dfrac{R}{g}$. Quiere decir que nuestro sector circular es una $\dfrac{g}{R}$-ésima parte del círculo de radio g. Luego su área será

$$A = \pi g^2 \cdot \frac{R}{g} = \pi g R$$



El área total de la superficie del cono es entonces $\pi Rg + \pi \ R^2$.

Calculemos ahora el área de un cilindro oblicuo. Supongamos que R es el radio del cilindro y g la generatriz.



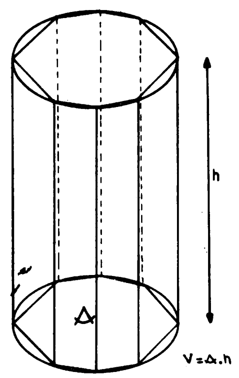
Observemos que si cortamos el cilindro por un plano perpendicular al eje (círculo de puntos) y pegamos el trozo de abajo sobre el cilindro, obtenemos un cilindro recto de radio R y altura g. Luego su área será $2\pi Rg$. Si además conocemos el ángulo de inclinación del cilindro podemos calcular también el área de las tapas (ver ejercicios 14 y 15 de la guía No. 10).

Este procedimiento no nos permite calcular el área lateral de un cono oblicuo (¿por qué?)

VOLUMEN DEL CILINDRO Y VOLUMEN DEL CONO

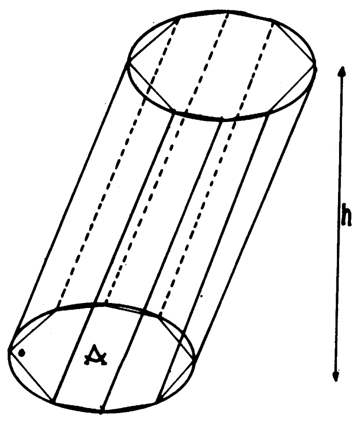
Queremos calcular el volumen de un cilindro y de un cono cualquiera (recto u oblicuo). Vamos a utilizar un procedimiento de aproximación y límite, semejante al que usamos para hallar el área del círculo.

Consideremos primero un cilindro recto de área de base A y altura h. Si inscribimos un polígono en el círculo base del cilindro y consideramos las generatrices que pasan por los vértices de ese polígono, obtenemos un prisma recto inscrito en el cilindro.

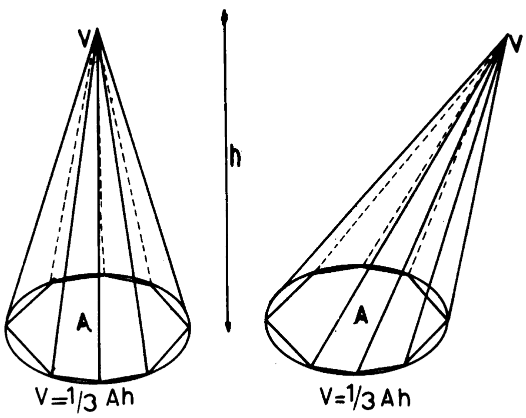


Las aristas del prisma recto son generatrices del cilindro. A medida que tomamos polígonos de mayor número de lados, obtenemos prismas inscritos en el cilindro cuyos volúmenes se aproximan más y más al volumen del cilindro. Para cada prisma, su volumen es el producto: Área de base por altura. La altura de todos los prismas es la misma h, el área de la base se aproxima al área del circulo base del cilindro. Luego en el limite, obtendremos que el volumen del cilindro es el producto $A \cdot h$.

Análogamente si consideramos un cilindro oblicuo, obtenemos. por el mismo procedimiento qué su volumen es $V = A \cdot h$



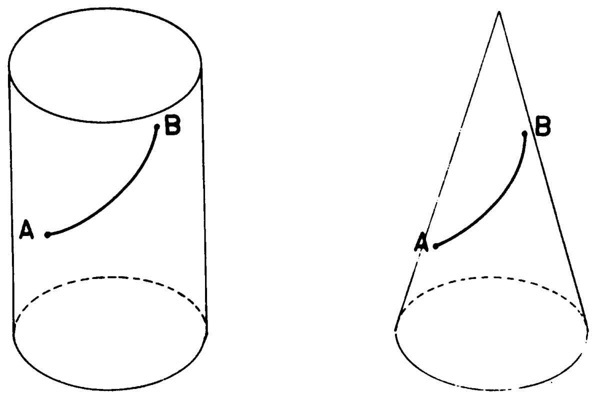
El volumen del cono recto, o del cono oblicuo se obtiene por el mismo procedimiento. Es el límite de los volúmenes de pirámides inscritas en el cono y de base poligonal, inscrita en la base del cono.



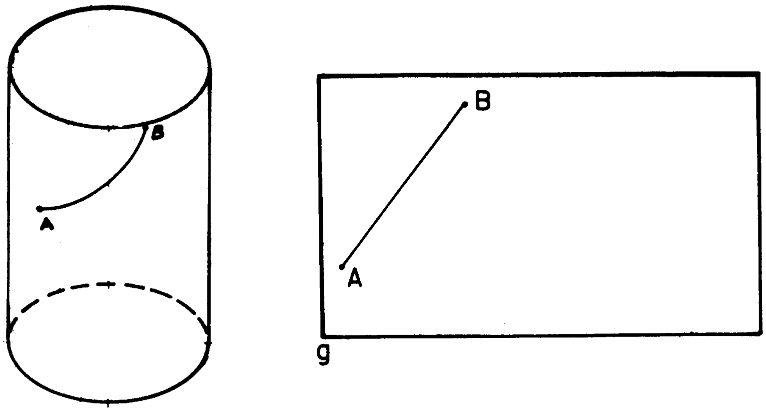
* * *

Hasta ahora hemos aplicado con éxito dos propiedades interesantes de las superficies cilíndricas y cónicas: el ser generadas haciendo girar una recta alrededor de un eje y la propiedad de ser desarrollables, de poderse desenrollar sobre un plano.

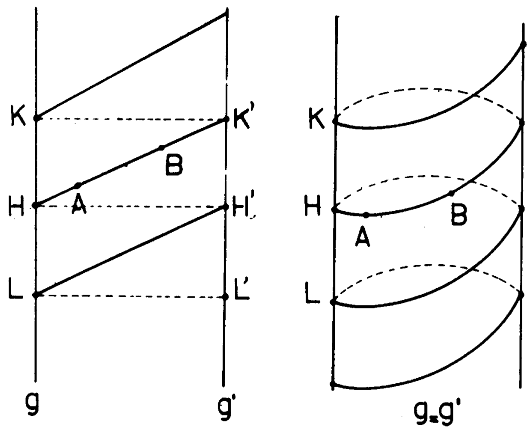
Vamos a sacarle partido a esta última propiedad en otra dirección. Un problema geométrico de mucho interés es el siguiente: ¿Cuál es el camino más corto sobre la superficie del cilindro (o del cono) entre dos puntos A y B? (Ver figura)



Cortando a lo largo de una generatriz, podemos desenrollar la superficie del cilindro sobre un plano. Una vez desarrollada obtenemos el camino más corto entre A y B: el segmento de recta que los une.



Al volver a enrollar el cilindro obtendremos un arco de curva, sobre la superficie del cilindro, que obviamente es el camino más corto entre A y B. Esto resuelve el problema. Tratemos de averiguar qué clase de curva es ésta.



Consideremos la superficie cilíndrica ilimitada, sin las tapas del cilindro. Al cortar por una generatriz y desenrollar sobre un plano, obtendremos una franja limitada por dos rectas g y g', que coinciden con la misma generatriz del cilindro. Prolonguemos el segmento AB hasta cortar estas rectas. Los puntos H y H', K y K', L y L' coinciden en el cilindro.

Si trazamos paralelas al segmento HK' por los puntos K y L obtenemos segmentos cuya imagen es la curva dibujada en la figura de la derecha sobre el cilindro. Esta curva tiene la propiedad de que las distancias $\overline{KH}$, $\overline{HL}$, etc. son todas iguales. Es decir, la curva sube la misma altura sobre el cilindro en cada vuelta. Este es el tipo de curva que describe la estría de un tornillo. Se llama *Hélice Circular,* la distancia $\overline{HK}$ es el paso de la hélice.

En resumen, el camino más corto entre A y B es un arco de hélice.

¿Qué ocurriría si los puntos A y B estuvieran sobre una misma generatriz o sobre una circunferencia perpendicular al eje? Claramente el camino más corto sería la misma generatriz o un arco de circunferencia.

Las curvas que señalan el camino más corto entre puntos cercanos de una superficie reciben el nombre de *Geodésicas* de la superficie.

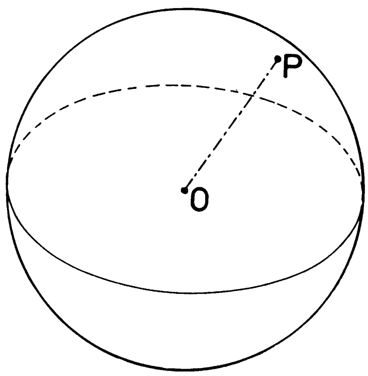
Las geodésicas del cilindro son entonces, las hélices circulares, las generatrices y las circunferencias. Observe que la geodésica completa no es el camino más corto entre dos puntos cualquiera de ella. Por ejemplo, el camino más corto entre H y K no es la hélice sino la generatriz HK. Lo que se puede afirmar es que el camino más corto entre dos puntos es siempre un trozo de alguna geodésica.

El cono resulta un poco más complicado que el cilindro, desde este punto de vista. La sola existencia de un punto muy especial, el vértice, es un ejemplo de esto. Haremos el estudio de las geodésicas del cono a través de los ejercicios y problemas.

* * *

LA ESFERA

El lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de otro punto, se llama esfera.



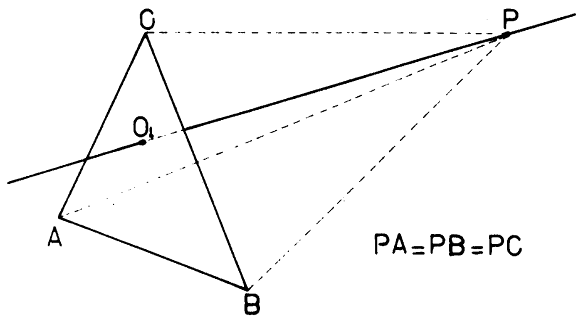
La distancia constante $\overline{OP}$ se flama radio, el punto O se llama centro de la esfera.

Veamos cuántos puntos del espacio necesitamos para tener una esfera perfectamente determinada:

PROPOSICIÓN 16. *Por cuatro puntos del espacio A, B, C y D, no coplanarios y tales que tres de ellos no estén alineados, pasa una única esfera.*

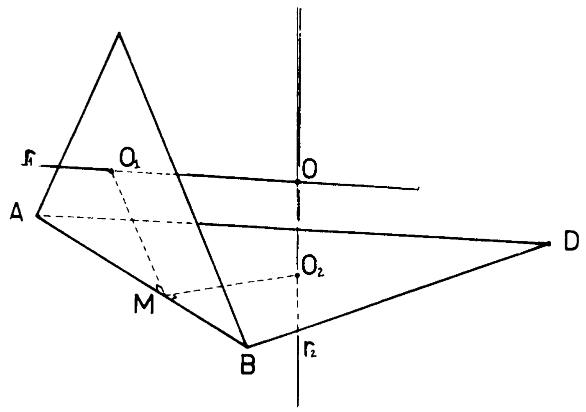
Dicho de otra manera: todo tetraedro es inscriptible en una esfera única.

PRUEBA: Sea O_1 el centro del circulo circunscrito al triángulo ABC.



Los puntos de la perpendicular al plano ABC por O_1, equidistan de A, B y C.

Igualmente, los puntos de la perpendicular al plano ABD por el centro O_2 del círculo circunscrito al triángulo ABD equidistan de A, B y D.

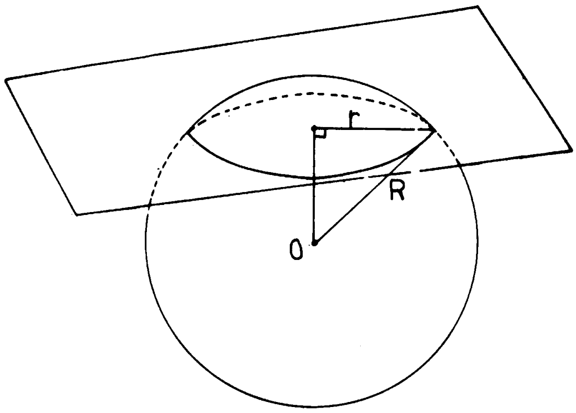


Estas dos perpendiculares se cortan en un punto O, porque las rectas r_1 y r_2 están en el plano perpendicular al segmento AB por su punto medio M. Esto es, r_1 y r_2 son coplanarias y como no pueden ser paralelas se deben cortar en un punto. Entonces O equidista de A, B, C y D, la esfera de centro O y radio OA es la solución del problema. Esta esfera es única por la forma como se construyó el punto O.

* * *

Una esfera y un plano pueden tener tres posiciones relativas distintas. Puede ser que no se corten, decimos que son *exteriores.* Puede ser que se corten en un único punto, decimos que son *tangentes.* Puede ocurrir que se corten en más de un punto, en este caso la intersección es una circunferencia.

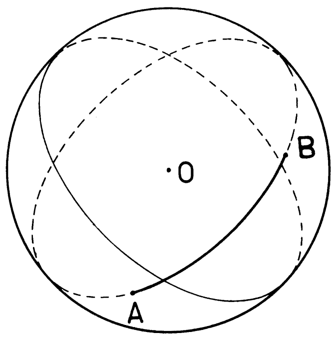
La demostración de este hecho se deja a cargo del lector.



El radio de la circunferencia así determinada, r, es menor o igual al radio de la esfera, R. Si el plano pasa por el centro de la esfera, la intersección es una circunferencia de radio R, que se llama circunferencia máxima, (es la circunferencia de mayor radio posible en la esfera).

Consideremos dos puntos A y B sobre una esfera. ¿Cuál es el camino más corto entre A y B?

Si los puntos A y B no son antipodales (extremos de un diámetro) el camino más corto será un arco de la única circunferencia máxima que pasa por A y B. (Única porque AB y O definen un plano).

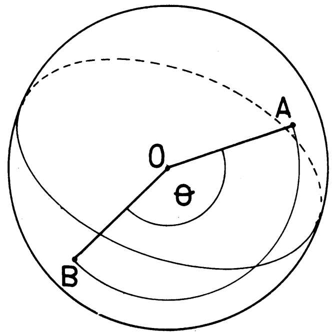


En este curso no vamos a alcanzar las herramientas necesarias para probar este hecho, que parece intuitivamente obvio y es verificable por experiencia: marque dos puntos no antipodales sobre un balón, con un lápiz dibuje la circunferencia máxima que pasa por A y B. Coloque una cuerda entre A y B. Observará que si la cuerda no sigue la circunferencia marcada siempre le será posible tensarla un poco mas.

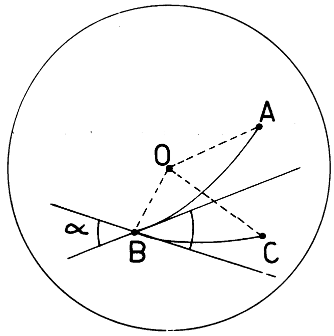
Si los puntos A y B son antipodales, existe una infinidad de circunferencias máximas que pasan por ellos.

Las circunferencias máximas son entonces las *geodésicas* de la esfera. Esto es, las curvas que señalan el camino más corto.

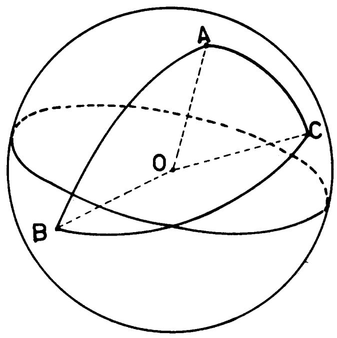
Para medir distancias en una esfera de radio R, bastará medir ángulos centrales, puesto que estos determinan completamente la distancia. También, la idea de ángulo en la esfera corresponde a la idea de ángulo diedro.



Por ejemplo, el ángulo entre arco AB y arco BC es el ángulo diedro α, entre los planos ABO y CBO.

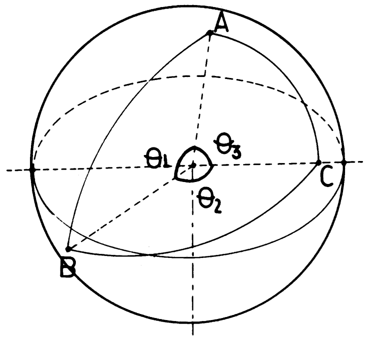


Un triángulo esférico, por ejemplo, es la figura formada por tres arcos de geodésicas que unen a tres puntos sobre la esfera.



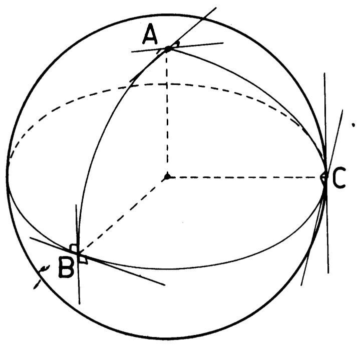
Los lados del triángulo son los arcos AB, AC y BC, y los ángulos son los tres ángulos del triedro determinado por ABC y O.

Algunas de las propiedades de los triángulos planos siguen siendo ciertas para triángulos esféricos. Por ejemplo: Un lado es siempre menor que la suma de los otros dos. Esto es consecuencia del teorema que dice que en todo triedro el ángulo de una cara es menor que la suma de los ángulos de las otras dos caras.

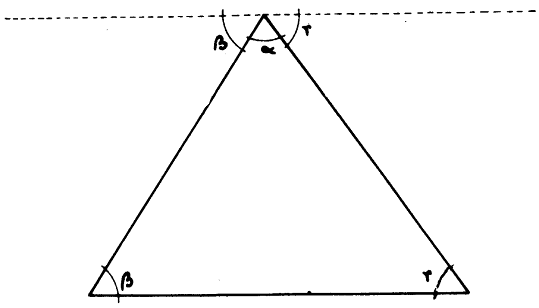


$$\Theta_1 < \Theta_2 + \Theta_3 \Longrightarrow \overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC}$$

Otras propiedades de los triángulos planos no son ciertas en los triángulos esféricos. Por ejemplo podemos construir un triángulo esférico tal que todos los ángulos sean rectángulos.



Si se recuerda bien, el hecho de que los tres ángulos de un triángulo plano sumen π depende de que se pueda trazar una paralela a una recta.



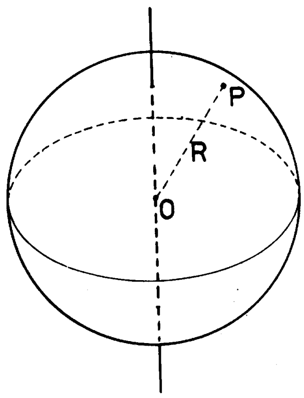
Esto no es cierto en la esfera las circunferencias máximas hacen el papel de las rectas en la esfera y cualquier par de circunferencias máximas se cortan en dos puntos. En la Geometría sobre la esfera falla el 5° postulado de Euclides.

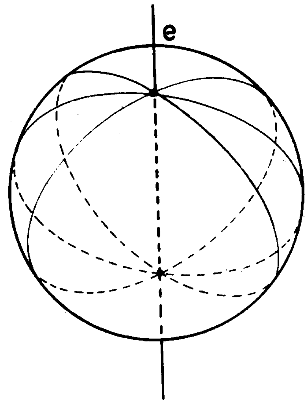
El estudio de la Geometría Esférica es muy importante. Vivimos sobre un cuerpo (la Tierra) que es aproximadamente una esfera y el universo, tal como se nos presenta al ojo desde la ventana de nuestro cuarto por ejemplo, es también una esfera.

El lector interesado tiene ya todas las herramientas necesarias para su estudio elemental que puede comenzar con la bibliografía citada al final de esta Guía.

ÁREA Y VOLUMEN DE LA ESFERA

La esfera es el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de otro punto fijo.

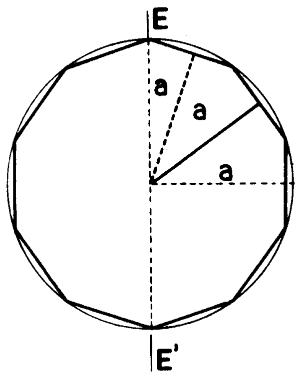


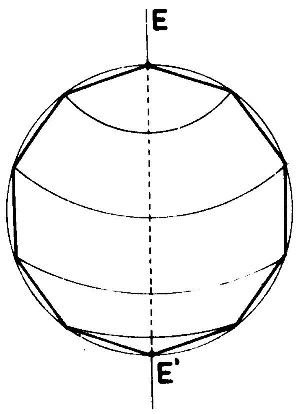


La esfera también se puede obtener como superficie de revolución, haciendo girar una circunferencia alrededor de un diámetro. Esta superficie no es desarrollable no se puede aplastar sobre un plano sin romperla, no podemos usar un procedimiento igual al que usamos en el caso del cilindro y el cono para calcular su área. Pero todavía podemos usar el hecho de ser generada por una circunferencia que gira alrededor de un diámetro.

Consideremos un polígono regular inscrito en una circunferencia. Al hacer girar la circunferencia alrededor de un diámetro EE', el polígono describe un sólido de revolución inscrito en la esfera.

Para mayor simplicidad sólo vamos a considerar polígonos que tengan un número par de lados, de manera que los extremos E y E' del diámetro son vértices del polígono.



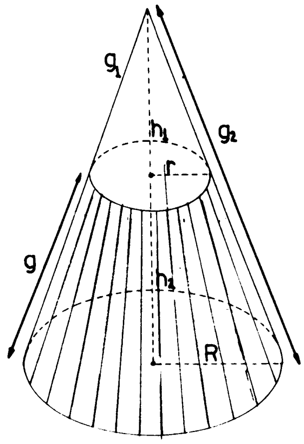


El sólido de revolución obtenido está formado por dos conos (generados por los lados adyacentes a E y E'), varios troncos de cono y quizás un cilindro (cuando haya un lado paralelo a EE').

Si consideramos polígonos de mayor número de lados, el sólido de revolución obtenido se aproximará más a la esfera. Entonces si pudiéramos calcular el área y el volumen de este sólido de revolución, para cualquier número de lados del polígono, obtendríamos el área y el volumen de la esfera como límite cuando el número de lados crece indefinidamente.

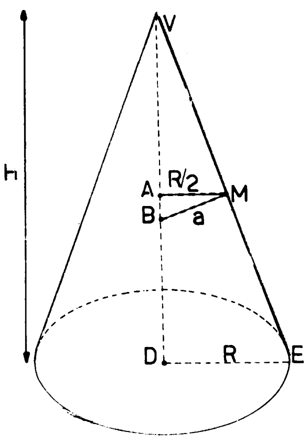
Ya sabemos calcular el área y el volumen del cilindro y el cono. En el caso del tronco del cono podríamos calcularlas como diferencia de dos conos. Área $= \pi R g_2 - \pi r g_1$

Volumen $= \dfrac{1}{3}\pi R^2 h_2 - \dfrac{1}{3}\pi r^2 h_1$



Estas fórmulas no son prácticas para nuestro propósito, porque hacen intervenir r y R, g_1 y g_2, h_1 y h_2. Quisiéramos una fórmula donde intervenga el apotema del polígono puesto que el apotema tiende al radio de la esfera cuando crece el número de lados. Esto no es difícil de obtener:

Veamos primero, el caso del cono, la fórmula del área que hemos obtenido es $A = \pi R g$, también se puede escribir $A = 2\pi \dfrac{R}{2} g$, donde $\dfrac{R}{2}$ es el radio medio del cono. Tracemos el segmento MB perpendicular a una generatriz por su punto medio M, hasta cortar el eje del como B, llamemos "a" su longitud (observe en la figura de la página 175 que "a" es el apotema del polígono).



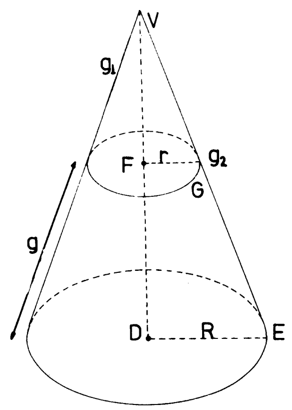
Los triángulos MAB y VDE son semejantes (¿por qué?) luego

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{VD}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{VE}} \text{ esto es: } \frac{R/2}{h} = \frac{a}{g}$$

De aquí obtenemos $\dfrac{R}{2}\, g = ah$ y la fórmula del área del cono se puede escribir así: $A = 2\pi ah$.

Consideremos ahora el tronco del cono, su área es

$$A = \pi R g_2 - \pi r g_1$$



Pero vemos que:

$$Rg_2 - rg_1 = (R + r)(g_2 - g_1)$$

En efecto, desarrollando tendremos:

$$(R + r)(g_2 - g_1) = Rg_2 - rg_1 + (rg_2 - Rg_1)$$

y de la semejanza de los triángulos VFG y VDE resulta:

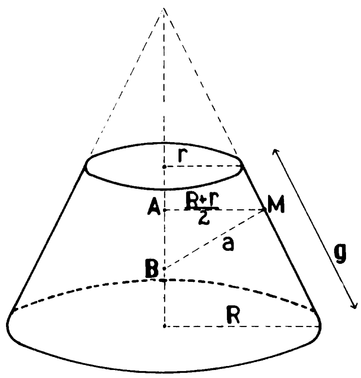
$$rg_2 - Rg_1 = 0$$

Entonces el área del tronco del cono se puede escribir $A = \pi\,(R + r)\, g$, donde $g = g_2 - g_1$ es la generatriz del tronco del cono. Esta fórmula se puede todavía escribir así:

$$A = 2\pi\, \frac{R + r}{2}\, g$$

Pero $\dfrac{R + r}{2}$ es el radio medio del tronco de cono (¿por qué?)

Por una consideración análoga al caso del cono, obtenemos $\dfrac{R + r}{2}\, g = ah$ (h es la altura del tronco de cono)



(Ver figura, usar teorema de Thales)

Finalmente obtenemos la siguiente fórmula del área lateral del tronco de cono:

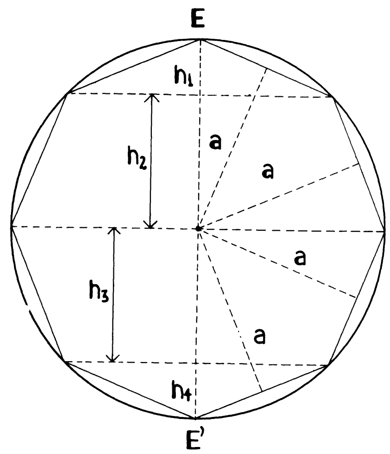
$$A = 2\pi\, ah$$

[Observe que en el caso que nos interesa a es el apotema del polígono].

ÁREA DE LA ESFERA. El área total del sólido de revolución generado al hacer girar el polígono inscrito en la circunferencia, es la suma de las áreas de los troncos de cono, conos y cilindros generados por cada lado del polígono:

$$2\pi ah_1 + 2\pi ah_2 + \ldots + 2\pi ah_{2n} = 2\pi a(h_1 + h_2 + \ldots + h_{2n})$$

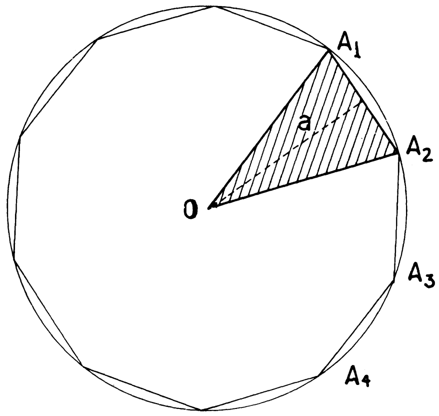
Como la suma de las alturas es, en cualquier caso, el diámetro EE', obtenemos finalmente que el área del sólido de revolución es $A' = 2\pi a(2R)$.



Si hacemos crecer el número de lados indefinidamente, el área de este sólido tiende al área de la esfera y el apotema, a, del polígono tiende al radio, R. En el límite, obtenemos el área de la esfera:

$$A = 4\pi R^2$$

VOLUMEN DE LA ESFERA.. El volumen de la esfera se va obtener como límite del volumen del sólido de revolución anterior, cuando el número de lados del polígono crece indefinidamente. Pero quisiéramos tener una fórmula para este volumen, que haga intervenir al apotema del polígono. Podríamos considerar el volumen del sólido como la suma de los volúmenes generados por cada triángulo A_iOA_{i+1}, al girar alrededor del eje.



Esto nos lleva a tener que calcular volúmenes de sólidos como éstos:

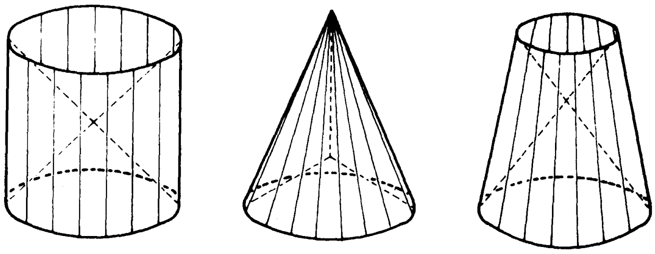


FIGURA (a)

Consideremos primero el caso de un prisma, una pirámide o un tronco de pirámide, de base poligonal. Queremos hallar el volumen del poliedro obtenido proyectando la superficie lateral de ese poliedro desde un punto P de su eje (Figura b)

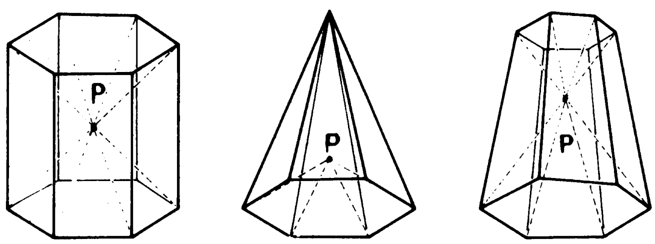


FIGURA (b)

En cualquier caso, este volumen es la suma de los volúmenes de pirámides que tienen por base una cara del poliedro y vértice en P. Como P está en el eje, su distancia a todas las caras es la misma, h.

El volumen de cada uno de estos poliedros será $\frac{1}{3}A \cdot h$, donde A es el área lateral.

Como los tres sólidos de la figura (a) son límites de poliedros como los de figura (b) cuando el número de caras crece indefinidamente, obtenemos que la fórmula $V = \dfrac{1}{3}A \cdot h$, también es válida para ellos. Ahora A es el área lateral del sólido de revolución y h es la distancia de P a una generatriz cualquiera.

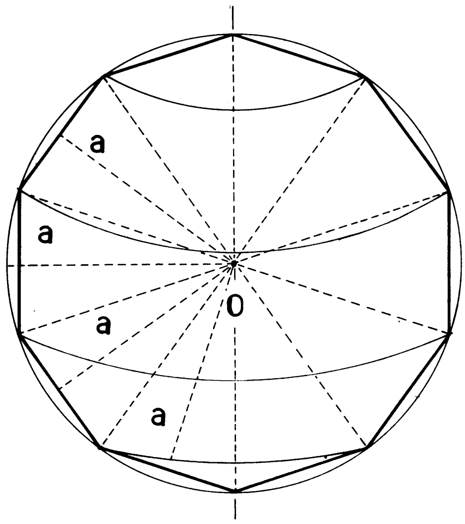
Finalmente obtenemos el volumen del sólido de revolución inscrito en la esfera

$$V' = \frac{1}{3}A'a$$

ya que la distancia del centro O de la esfera a cada una de las generatrices de los sectores, es el apotema del polígono. A' es el área del sólido de revolución obtenido al hacer girar el polígono.

Cuando el número de lados del polígono crece indefinidamente, " a " tiende a R, A' tiende al área de la esfera A y V' tiende el volumen de la esfera V. Entonces, en el límite obtenemos

$$V = \frac{1}{3}A \cdot R = \frac{4}{3}\pi R^3$$



NOTAS:

1. En esta Guía hemos tocado el estudio de la Geometría sobre una superficie (geodésicas): cilindro, cono o esfera. Este estudio se hace con toda eficacia utilizando otras técnicas, la llamada Geometría Diferencial. No se trata de otro tipo de Geometría en el sentido de Klein, sino de un método muy poderoso para atacar ciertos problemas relacionados con curvas y superficies que son de mucha importancia en matemáticas y en física. Como la principal herramienta que se utiliza es el Cálculo Diferencial, su estudio queda fuera de las pretensiones de este curso, pero esperamos que lo poco que se ha dicho sirva para despertar la imaginación de algunos lectores.

Los matemáticos que más contribuyeron al desarrollo de esta ciencia fueron Carlos Federico Gauss y Bernardo Riemann.

2. Euclides fue el fundador de la famosísima escuela de Alejandría, durante el reinado de Ptolomeo I. Ya hemos encontrado algunos de los matemáticos de esta escuela posteriores a él. De la vida de Euclides se sabe muy poco, solo se conservan algunas anécdotas: Un día después de una lección, un estudiante le preguntó de qué le serviría todo eso. En respuesta, Euclides llamó a un sirviente y le ordenó que le entregara una moneda al estudiante diciéndole: Ahí tienes, puesto que crees que debes ganar con lo que aprendes.

   A pesar de no saberse mucho sobre la vida de Euclides, se conserva un enorme tratado de Geometría escrito en ocho libros: *Los Elementos.* En ese tratado recopiló todo lo que se sabía en su época, desarrollando la Geometría con todo rigor científico a partir de un conjunto de axiomas.

   El quinto de estos axiomas es el famoso postulado de las paralelas, su enunciado es equivalente a éste: " por un punto exterior a una recta se puede trazar una paralela a ella y una sola". El postulado de Euclides se hizo famoso posteriormente porque muchos geómetras trataron de probar que era innecesario, que podía demostrarse, como teorema, a partir de los demás axiomas. Este esfuerzo terminó con la publicación de los trabajos de Lobachevski y de Bolyai, mediados del siglo diecinueve.

   Estos dos matemáticos construyeron, independientemente uno del otro y por la misma época, un modelo de Geometría que satisface a todos los axiomas usuales menos el de las paralelas. Con esto quedó claro que el axioma de las paralelas es independiente de los demás, no es consecuencia de ellos. Es un hecho particular de la Geometría Euclídea.

   Posteriormente, con Riemann y el estudio de la Geometría sobre una superficie, el modelo de Lobachevski y Bolyai perdió importancia, excepto para los que se dedican al estudio de los fundamentos de la matemática y a la Lógica.

3. En esta Guía hemos aprendido a calcular el volumen del cilindro, el cono y la esfera. En la Guía anterior hablábamos de Arquímedes, demás está decir que el calculó los volúmenes y áreas de estos cuerpos. Publicó dos libros sobre el cilindro y la esfera.

   Como también Arquímedes era un ingeniero, con una facilidad enorme para los métodos experimentales y además escribió un libro titulado *El Método,* donde recomendaba a sus colegas utilizar métodos experimentales para formular hipótesis geométricas y aún para orientarse en la demostración científica de estas hipótesis, vamos a terminar estas notas sugiriendo un experimento para comprobar las fórmulas obtenidas y para calcular otros volúmenes en forma empírica. Mida el diámetro de una esfera (una pelota o una munición). Sumérjala en un recipiente lleno de agua hasta el borde y recoja el agua que se desplaza (en otro recipiente). Utilizando un cilindro graduado mida el volumen de agua desplazado. Verifique la fórmula del volumen de la esfera.

¿Sirve este método para hallar π empíricamente?

Halle el volumen de un cuerpo cualquiera de forma irregular. Una piedra, por ejemplo.

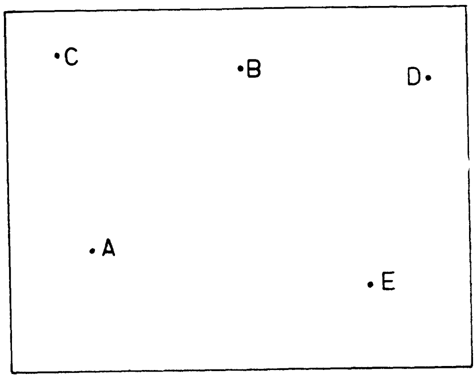
BIBLIOGRAFÍA

1. Puig Adam: *Geometría Métrica.* Tomo I
2. Seymour y Smith: *Solid Geometry*

PROBLEMAS Y EJERCICIOS

1. *a*) Sobre un papel en blanco marque puntos como los de la figura. Dibuje las geodésicas que señalan el camino más corto entre estos puntos.

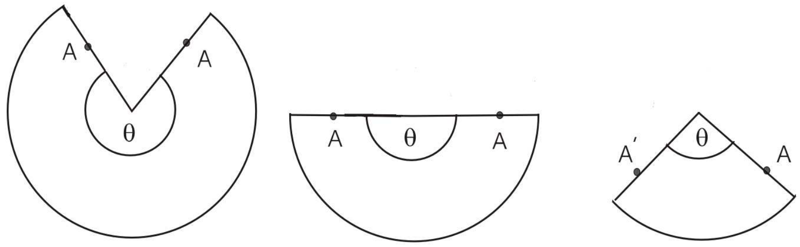
   Enrolle el papel en forma de cilindro y observe el resultado.



   b) ¿Cuántas geodésicas hay que unen los puntos A y B?

   c) Dibuje sobre el papel plano una geodésica que una a D con A y que dé tres vueltas al cilindro. Enrolle el papel y compruebe si su dibujo fue correcto.

2. Recorte tres sectores circulares de papel, como los de la figura. Uno tiene ángulo $\theta > \pi$, otro $\theta = \pi$ y otro $\theta < \pi$



a) Dibuje rectas sobre estos sectores y enróllelos en forma de cono. Observe las geodésicas obtenidas. Observe que los puntos A y A' coinciden en el cono.

b) Dibuje una geodésica que pase por el punto A. Dé un método para dibujarla en cualquiera de los tres casos con regla y compás.

3. Pruebe las siguientes afirmaciones sobre geodésicas del cono. (Trate de dar pruebas geométricas. Si tiene dificultad en algún caso construya modelos de papel como los anteriores y dibuje las geodésicas, en todos los casos posibles, con regla y compás. Después de hacer esto seguramente podrá dar una demostración).

   a) Las circunferencias en planos perpendiculares al eje del cono no son geodésicas.

   b) Toda geodésica, que no sea una generatriz, alcanza una altura máxima y luego baja. Las únicas geodésicas que llegan al vértice son las generatrices.

   c) Si $\theta > \pi$ las geodésicas no tienen autointersecciones (puntos donde la curva se corta a ella misma).

   d) Si $\theta < \pi$, las geodésicas tienen autointersecciones. Dibuje una geodésica que tenga un sólo punto de autointersección, otra que tenga dos y otra que tenga tres.

   e) En el cono no existen geodésicas cerradas (como la circunferencia en el caso del cilindro y de la esfera).

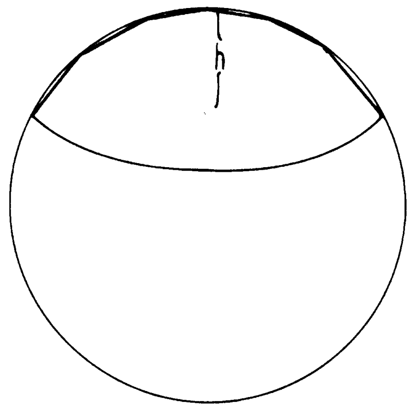
4. El área lateral de un cilindro recto es 440 cm^2 su altura es 21 cm. Calcule el diámetro de la base (use $\pi = \dfrac{22}{7}$)

5. Halle el radio de la base de un cilindro que tiene su área lateral y su volumen numéricamente iguales.

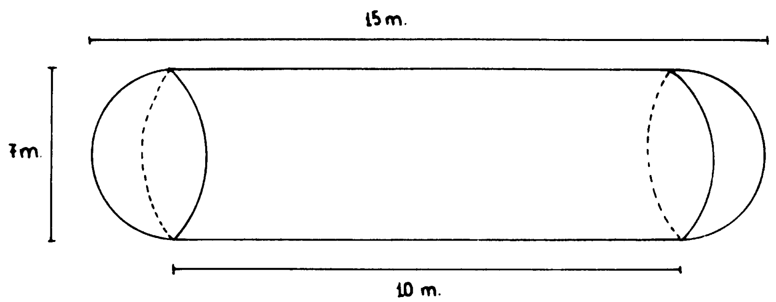
6. Los volúmenes V y V' de dos cilindros semejantes están en la relación $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{8}{27}$. Halle el cociente $\dfrac{A}{A'}$ entre las áreas laterales. Si el radio del cilindro menor es 3, ¿cuál es el radio del otro cilindro?

7. La altura de un cono es igual al radio de su base, pruebe que su volumen está dado por la fórmula $V = \dfrac{RA\sqrt{2}}{6}$, donde A es el área lateral.

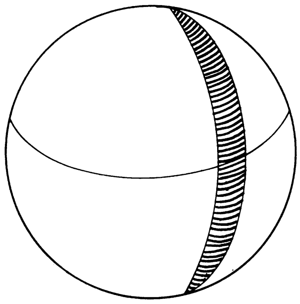
8. Las áreas laterales de dos conos semejantes son 18 cm^2 y 50 cm^2. Si el volumen del cono mayor es 250 cm^3, halle el volumen del cono menor
9. Pruebe la fórmula $V = \frac{1}{3} Aa$ que da los volúmenes de los sólidos de la figura (a) en la página 179 restando volúmenes de conos en lugar del procedimiento empleado en la Guía.
10. Área de un casquete esférico.



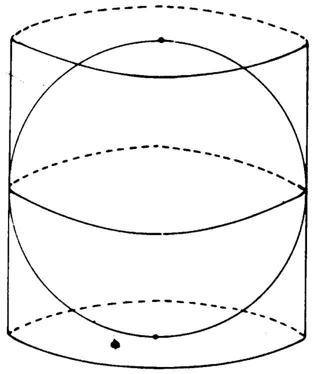
   a) Utilizando el mismo método de la Guía para hallar el área de la esfera, demuestre que el área de un casquete esférico está dada por $A = 2\pi Rh$, donde R es el radio de la esfera.
   b) ¿Qué área de la Tierra se puede ver desde un avión que vuela de 9.000 m. sobre el nivel del mar? (Radio de la Tierra, en el Capítulo 5).
   c) Halle el área del casquete polar.
11. Usando el mismo método del problema 10, halle el área de la Zona Tórrida.
12. Se quiere pintar un depósito de gas de forma cilíndrica rematado por dos casquetes esféricos con las dimensiones de la figura. Se sabe que la pintura cubre 25 m^2 por galón. ¿Cuántos galones de pintura hay que comprar?



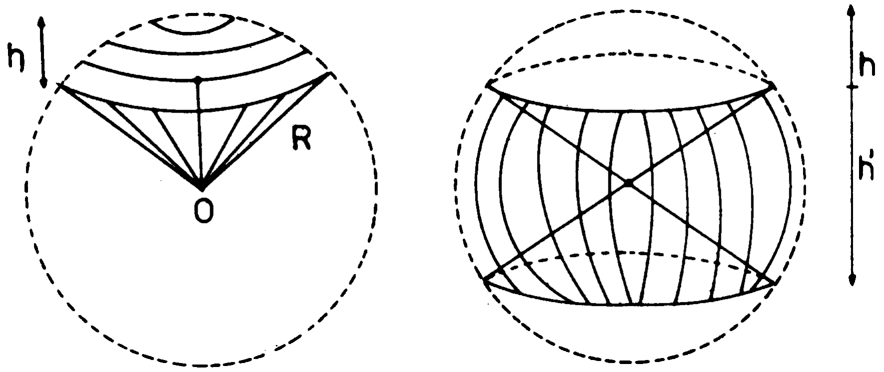
13. Calcular el volumen de una tuerca hexagonal si el lado de la tuerca es de 2 cm., su altura es 1 cm. y el diámetro del tornillo es 1,5 cm.
14. Calcule el volumen del depósito de gas del problema 12.
15. Halle el área de la parte de la Tierra comprendida entre dos meridianos separados por 1°.



16. ¿Qué relación hay entre los volúmenes de una esfera y del cilindro circunscrito a ella?



17. Calcule el volumen de sectores esféricos como los de la figura.



18. Se quiere construir un altavoz tronco cónico de 1 m de longitud y dé diámetro 50 cm y 10 cm respectivamente. Calcule el área de metal que hay que usar. Dibuje el sector circular que debe cortar para construirlo.
19. Una esfera tiene área igual a su volumen. Hallar el radio de dicha esfera.
20. En un cono recto de ángulo α se ha inscrito una esfera. La superficie de la esfera es al área de la base del cono como 4:3. Hallar el ángulo del vértice del cono.
21. En un cono recto de ángulo α se ha inscrito una esfera. Si la superficie total del cono es igual a 9 veces la superficie de la esfera, halle la razón entre el volumen del cono y el volumen de la esfera.

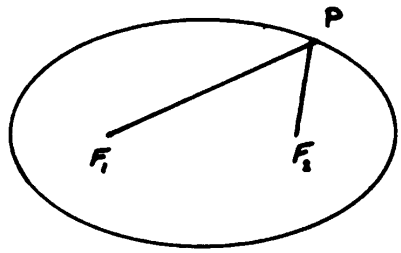
CAPíTULO 12

SECCIONES CÓNICAS

DEFINICIÓN MÉTRICA

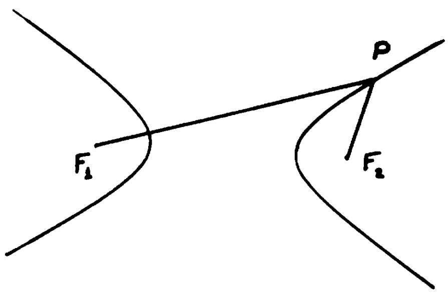
En este capítulo estudiaremos las llamadas "Secciones Cónicas". Son las curvas que se obtienen como intersección de un plano con un cono. Comenzaremos por dar una definición métrica independiente del cono y más adelante, en el próximo capítulo, probaremos que las curvas definidas de esta manera, son las que se obtienen como secciones del cono.

ELIPSE. Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Los puntos fijos F_1 y F_2 se llaman focos de la elipse.



$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = k$$

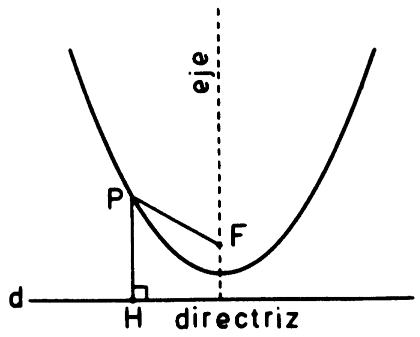
HIPÉRBOLA. Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es constante. Los puntos fijos F_1 y F_2 se llaman focos de la hipérbola.



$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = k$$

Observación: la condición $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = k$ corresponde a una rama de la hipérbola, mientras que la condición $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = -k$ corresponde a la otra rama.

PARÁBOLA. Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo y de una recta. El punto fijo F se llama foco de la parábola y la recta d se llama directriz.

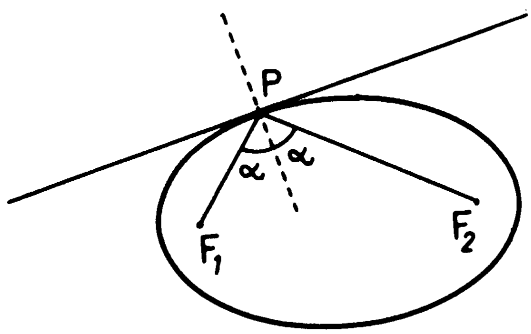


$\overline{PH} = \overline{PF}$

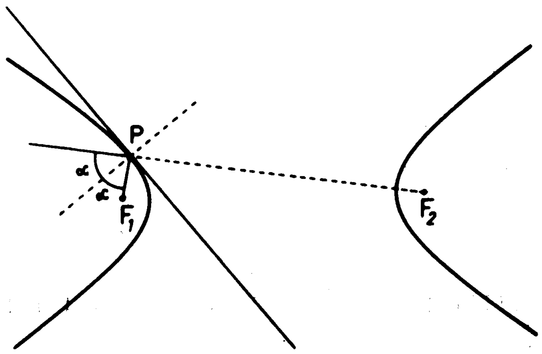
La recta perpendicular a d por el punto F se llama eje de la parábola.

* * *

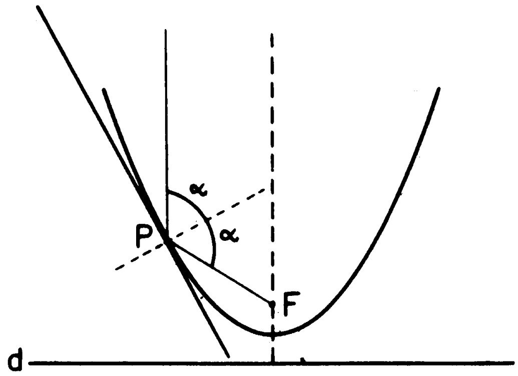
TEOREMA 17. *Consideremos una elipse y tracemos una tangente en un punto cualquiera P. Los ángulos que forman PF, y PF' con la perpendicular a la tangente son iguales.*



En el caso de la hipérbola se tiene una propiedad análoga:



Finalmente en el caso de la parábola, si trazamos la tangente en un punto cualquiera P, el ángulo que forma PF con la perpendicular a la tangente es igual al ángulo que forma la paralela al eje por P con la misma perpendicular



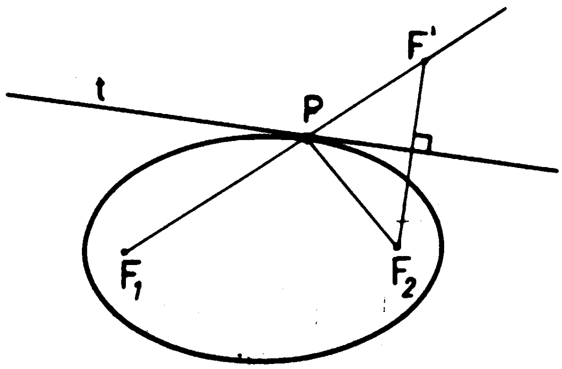
Para demostrar estas propiedades vamos a dar primero un método para trazar la tangente a la curva en un punto.

TANGENTE A LA ELIPSE. Si P es un punto cualquiera de una elipse, prolonguemos PF_1 y sea F' un punto tal que $\overline{PF'} = \overline{PF_2}$.

Vamos a demostrar que la tangente a la elipse por P es la mediatriz del segmento $F'F_2$. Esto se probará demostrando que el punto P es el único punto de contacto entre la mediatriz t del segmento $F'F_2$ y la elipse. Dicho de otra manera, si P' es otro punto de t entonces P' no está en la elipse.

Observemos que:

$$\overline{F_1F'} = \overline{PF_1} + \overline{PF'} = \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = k$$



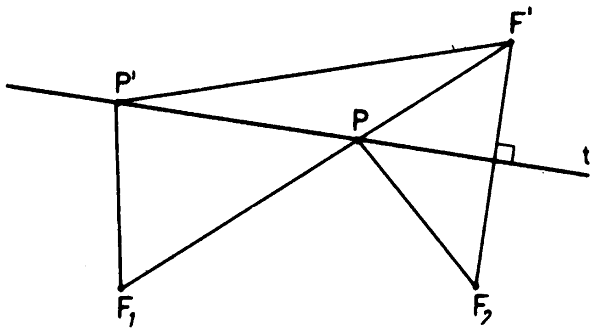
Luego, si P' es otro punto de la mediatriz t obtenemos en el triángulo $P'F'F_1$:

$$\overline{P'F_1} + \overline{P'F'} > \overline{F_1F'} = k$$

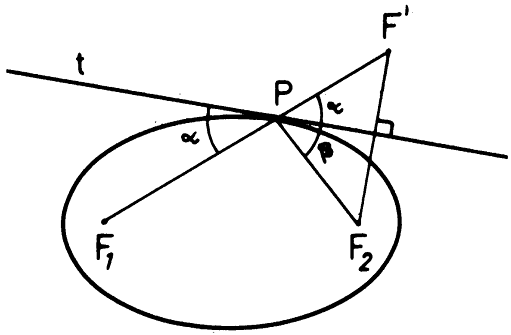
pero $\overline{P'F'} = \overline{P'F_2}$ porque P' está en la mediatriz de $F'F_2$. Luego

$$\overline{P'F_1} + \overline{P'F_2} > k,$$

es decir P' no puede estar en la elipse.

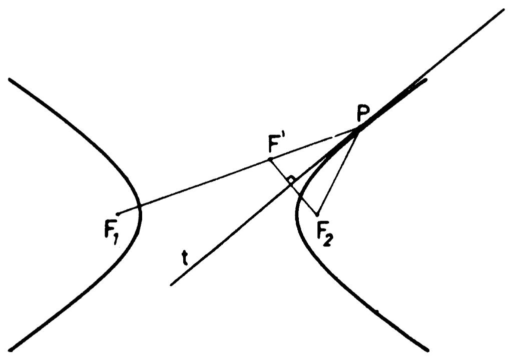


De esta construcción de la tangente a la elipse por el punto P resulta una prueba inmediata del teorema en el caso de la elipse. Ya que en la figura se observa que los ángulos marcados α son iguales y además $\alpha = \beta$ puesto que el triángulo $PF'F_2$ es isósceles, la mediatriz de $F'F_2$ coincide con la bisectriz del ángulo en P.



TANGENTE A LA HIPÉRBOLA. Sea P un punto cualquiera de un a hipérbola como en el dibujo, tomemos el punto F' tal que $\overline{PF_2} = \overline{PF'}$.

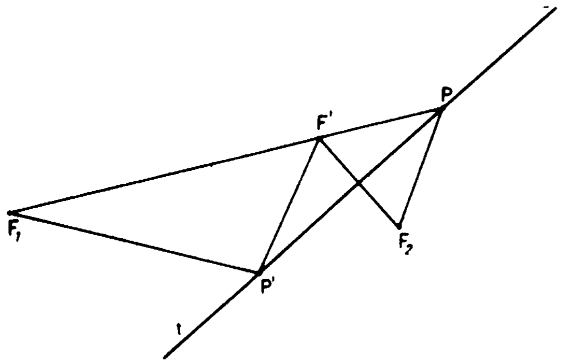
Vamos a probar que la mediatriz de $\overline{F'F_2}$ es la tangente a la hipérbola en P.



Análogamente al caso de la elipse, observe que

$$\overline{F_1F'} = \overline{PF_1} - \overline{PF'} = \overline{PF_1} - \overline{PF_2} = k$$

entonces si P' es otro punto de la mediatriz t, en el triángulo $F'P'F_1$ se tendrá que



$\overline{F_1F'} + \overline{P'F'} > \overline{P'F_1}$

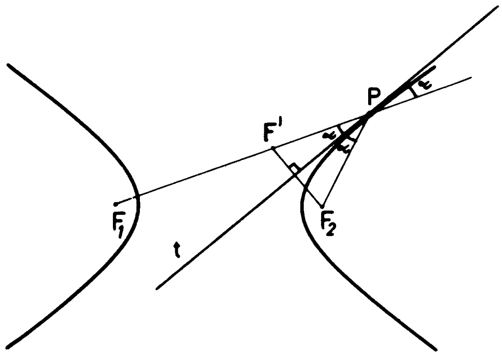
Luego:

$\overline{F_1F'} > \overline{P'F_1} - \overline{P'F'}$

es decir $k > \overline{P'F_1} - \overline{P'F_2}$, luego P' no puede pertenecer a la hipérbola.

La demostración del teorema es también análoga al caso de la elipse.

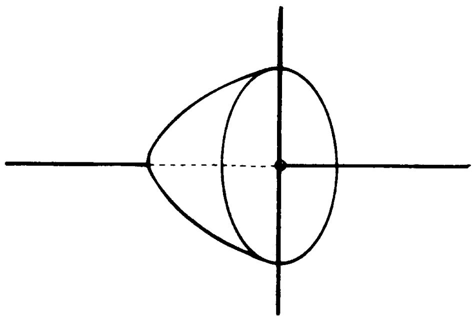
Observe en el dibujo que el triángulo $PF'F_2$ es isósceles, luego los ángulos marcados α son todos iguales.



El caso de la parábola queda como ejercicio (Ejercicio No. 1).

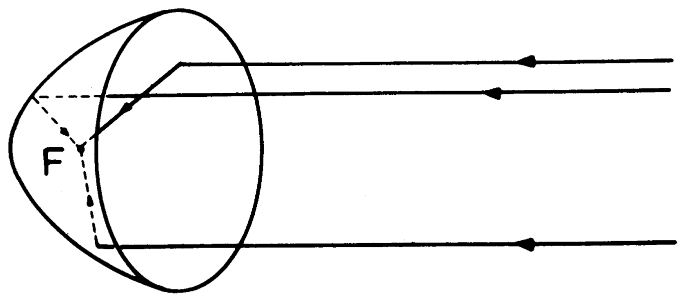
Observaciones: En estas propiedades radican algunas de las aplicaciones más frecuentes de las cónicas.

Haciendo girar una parábola alrededor de su eje se describe una superficie en el espacio llamada *paraboloide de revolución.*



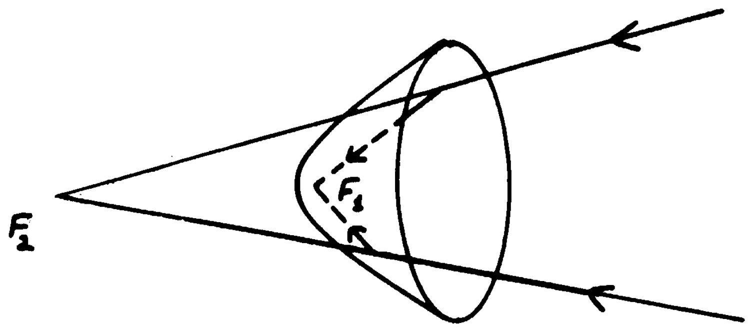
Entonces si construimos un espejo con forma de paraboloide, los rayos de luz paralelos al eje del paraboloide se reflejan según rectas que pasan por F. La luz se concentra en F.

Si colocamos una fuente de luz en el foco, los rayos se reflejan en dirección del eje. Estos espejos se utilizan para construir faros y telescopios.

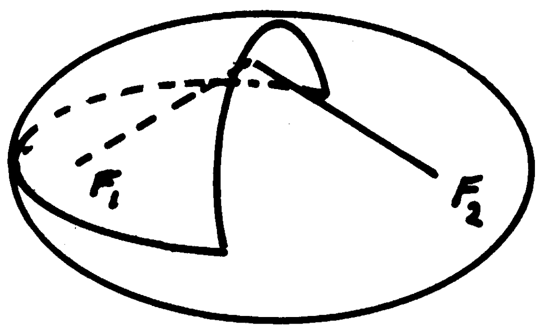


Análogamente si hacemos girar una hipérbola alrededor de la recta que une los focos obtenemos una superficie llamada *hiperboloide.*

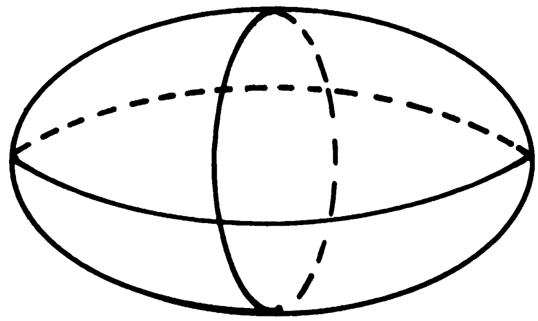
Los rayos que inciden sobre esta superficie y que vienen en la dirección de un foco se reflejan pasando por el otro foco. Esta propiedad se usa en la construcción de algunas antenas.



La superficie generada por una elipse que gira alrededor de la recta F_1F_2 se llama *elipsoide.*



Un espejo con la forma de un elipsoide serviría para concentrar los rayos de una fuente luminosa en otro punto.



NOTA

Las secciones cónicas eran conocidas ampliamente por los geómetras griegos. Desde el año 350 a.C. el tema había sido tratado por diversos geómetras, pero es Apolonio de Perga, alrededor del año 225 a.C., quien hace el estudio más completo y lo publica en ocho libros. Los tres primeros libros de Apolonio recogen conocimiento anterior sobre el tema incluido en los trabajos de Euclides, Aristarcus y Menechmo (350 a.C.); los libros 4 a 7 son nuevos, originales de Apolonio. En el libro 4 introduce los nombres de las cónicas: elipse, hipérbola y parábola.

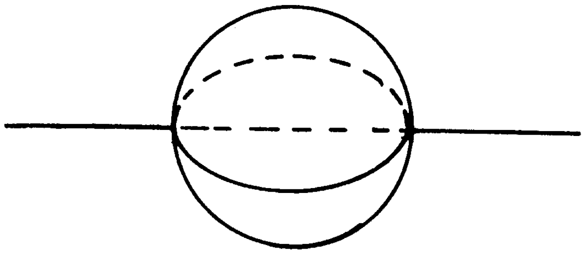
Del tratado de Apolonio se conservan los cuatro primeros libros en griego y los libros 5, 6 y 7 en traducción al árabe. El 8° libro se perdió, posiblemente en la destrucción de la Biblioteca de Alejandría en el año 391 d.C.

El tratado de Apolonio es tan completo que hubo que esperar hasta el siglo XVII para añadir algo nuevo a lo que sabía Apolonio. Esto ocurre por la invención de la Geometría Proyectiva y el descubrimiento de las propiedades proyectivas de las cónicas. Es notable que la invención de la Geometría Analítica por Descartes en 1673 no añadió nada nuevo al conocimiento que se tenía del tema, sólo logró expresarlo en un modo más conveniente.

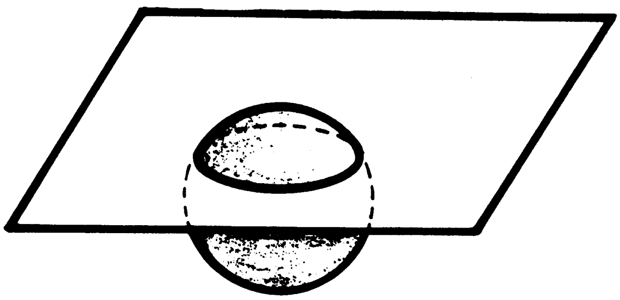
Las secciones cónicas aparecen hoy día, en cualquier aplicación de la ciencia y de la tecnología y además son una manera de expresión de diversos fenómenos naturales. Sin embargo, la belleza matemática de su estudio fué lo que motivó a los geómetras griegos y árabes y a todos los que las estudiaron durante los 19 siglos, que van de 350 a.C. hasta 1603, año en el cual Kepler descubre que las órbitas de los planetas son elipses, con el Sol en uno de sus focos. A partir de ese momento las secciones cónicas pasa a ser matemática aplicada y acompañan el despertar de la ciencia moderna: Kepler, Galileo, Newton descubren que esas curvas son inseparables de las leyes de la Naturaleza.

LAS CÓNICAS COMO SECCIONES PLANAS DE UN CONO

La superficie que genera una circunferencia que gira en el espacio alrededor de un eje que pasa por su centro es una esfera.

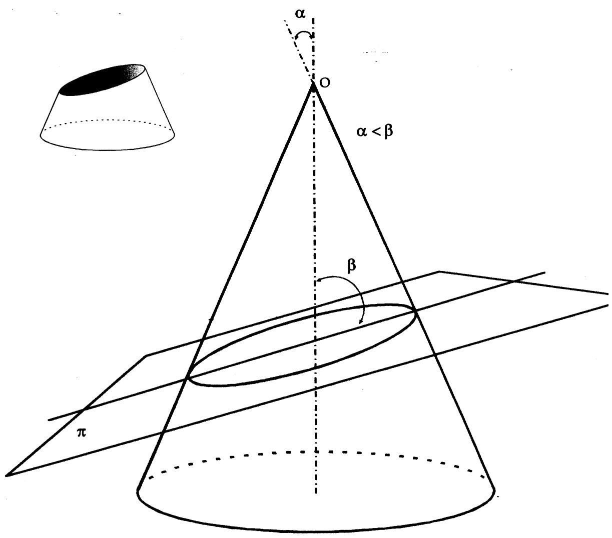


¿Qué curva se produce al cortar la esfera con un plano?
Puede ocurrir que el plano sea tangente a la esfera, en ese caso la intersección se reduce a un punto, y puede ocurrir que el plano corte a la esfera según una circunferencia.



Mucho más interesante resulta un estudio similar en el caso de un cono. Al cortar el cono con un plano se pueden obtener diversas curvas, llamadas secciones cónicas.

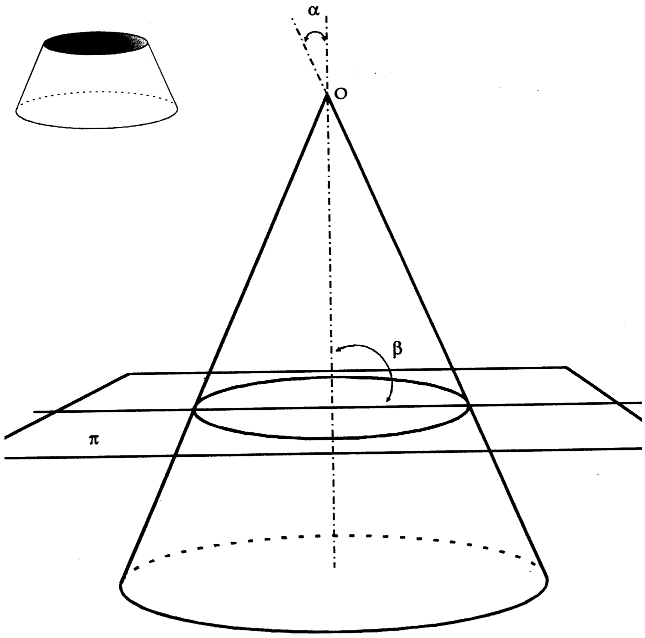
Primer Caso. El plano corta al cono oblicuamente sin ser paralelo a ninguna generatriz.



$$\frac{\pi}{2} > \beta > \alpha$$

La curva obtenida se llama *elipse.*

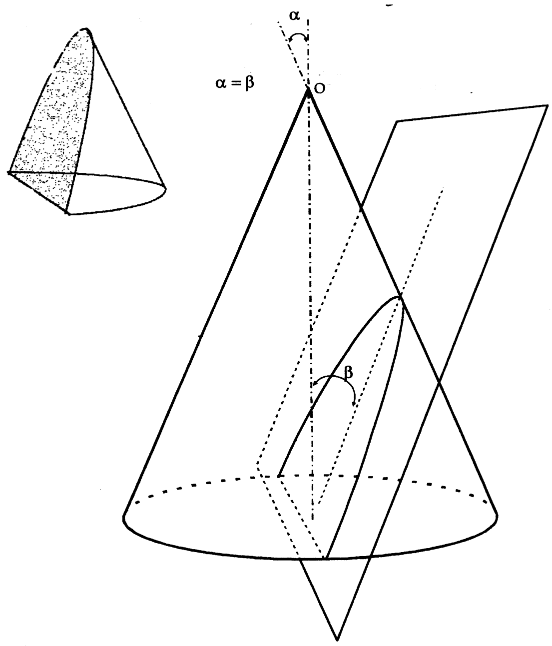
Segundo Caso. El plano corta el cono perpendicularmente al eje en un punto distinto de O.



$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

La sección obtenida es una circunferencia.

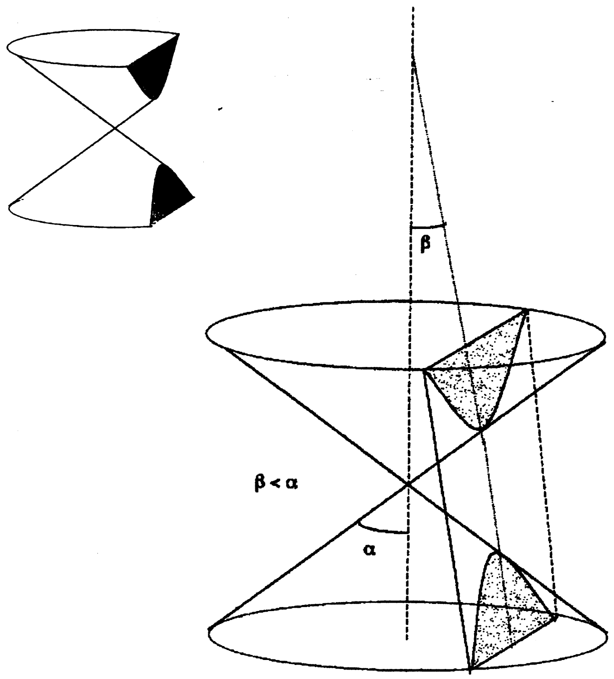
Tercer Caso. El plano es paralelo a una generatriz y no pasa por O.



$$\beta = \alpha$$

La sección obtenida se llama parábola.

Cuarto Caso. El plano corta a las dos alas del cono

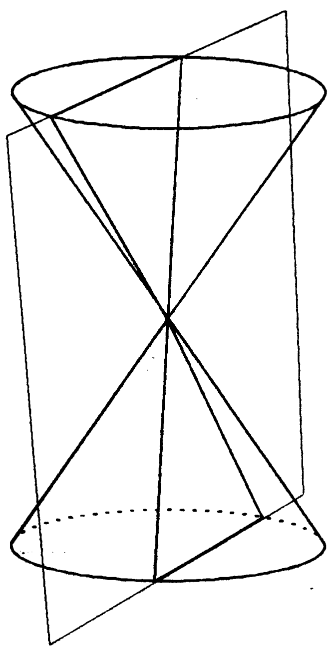


$\beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$

La sección obtenida se llama hipérbola.

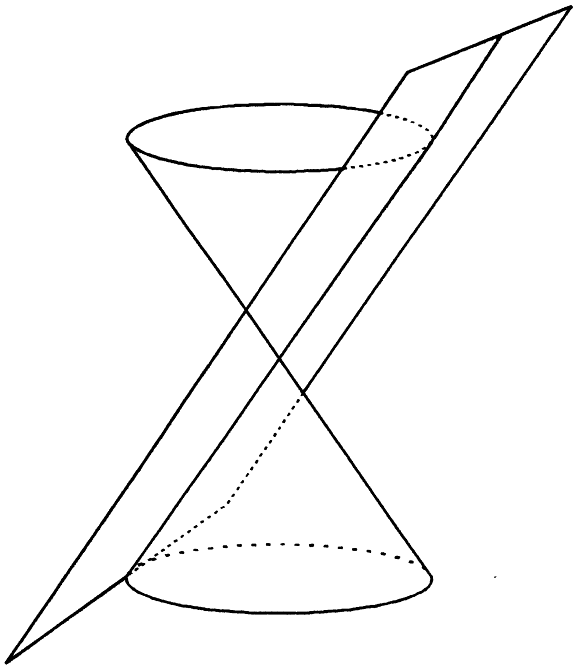
Estos son los casos de secciones de cónicas más conocidas, pero hay más, correspondientes a las llamadas cónicas degeneradas.

Quinto Caso.



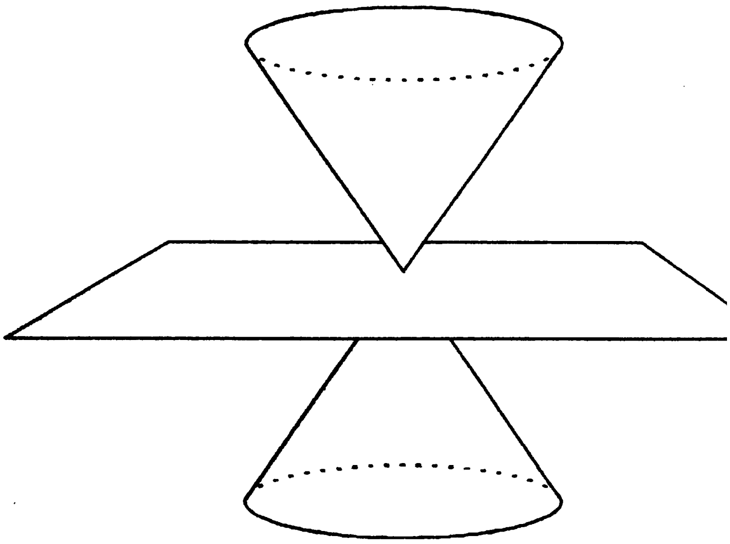
Dos rectas que se cortan.

Sexto Caso.



Una recta (el plano es tangente al cono).

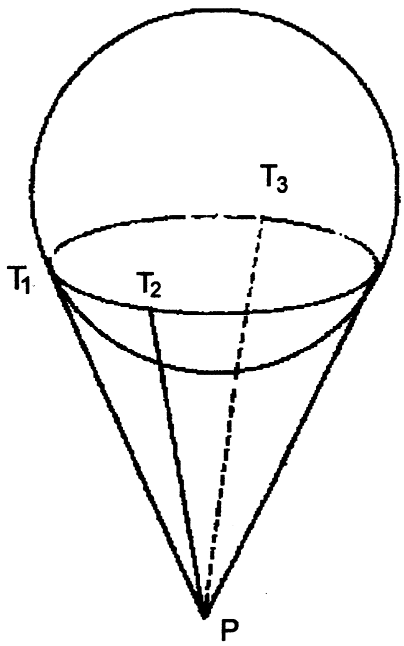
Séptimo Caso.



Un punto.

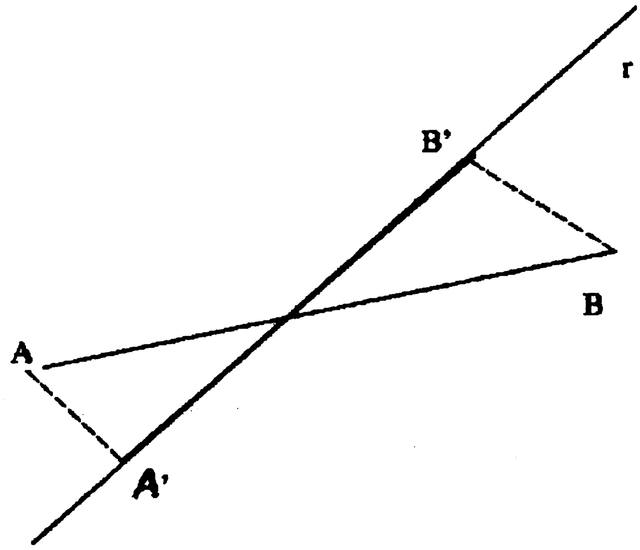
En los tres últimos casos el plano pasa por el vértice del cono.

Volvamos a las cónicas usuales, nos podemos preguntar: ¿son estas curvas la misma elipse, hipérbola y parábola que estudiamos anteriormente? Para responder a esto vamos a estudiarlas un poco más. Primero observemos que si tenemos una esfera y un punto P exterior a ella, todas las tangentes desde P a la esfera forman un cono.

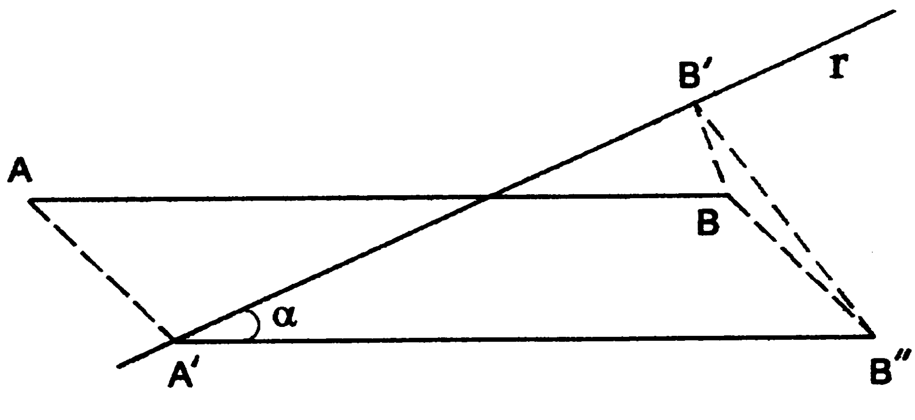


Además la intersección del cono y la esfera es una circunferencia y las longitudes de los segmentos que van de P a los puntos de tangencia son todas iguales: $\overline{PT_1} = \overline{PT_2} = \overline{PT_3}$ etc. Esta observación es importante ya que el método que vamos a seguir para estudiar las secciones cónicas, será el de construir esferas tangentes al cono y al plano que lo corta.

Otra técnica que vamos a utilizar es la de proyectar un segmento sobre una recta en el espacio. Dada una recta r y un segmento $\overline{AB}$ en el espacio, construimos las perpendiculares a r por A y por B. Queremos determinar la longitud del segmento proyección $\overline{A'B'}$.



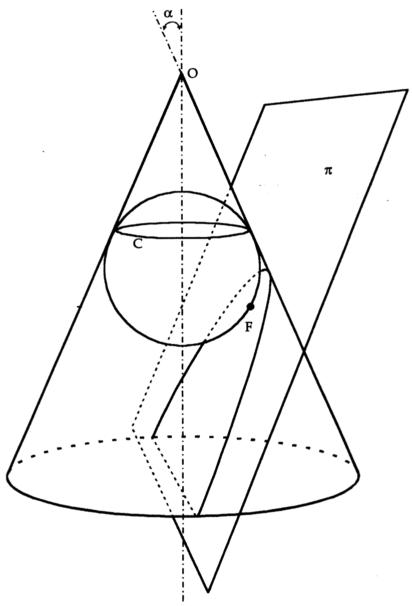
Para obtener $\overline{A'B'}$, trazamos por A' un segmento paralelo a AB, formará un ángulo α con la recta r



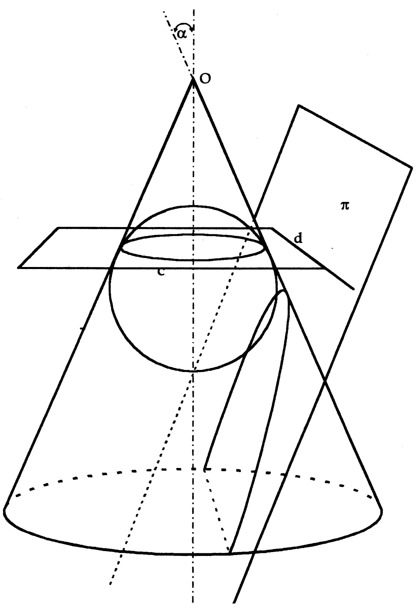
Como el segmento $A'B''$, y la recta r están en un mismo plano, la proyección será $\overline{A'B'} = \overline{A'B''} \cos\alpha = \overline{AB} \cos\alpha$.

Comencemos el estudio de la parábola.

Sea π un plano que corta al cono según una parábola. Construimos una esfera que sea tangente al cono en una circunferencia (c) y tangente al plano π en el punto F.



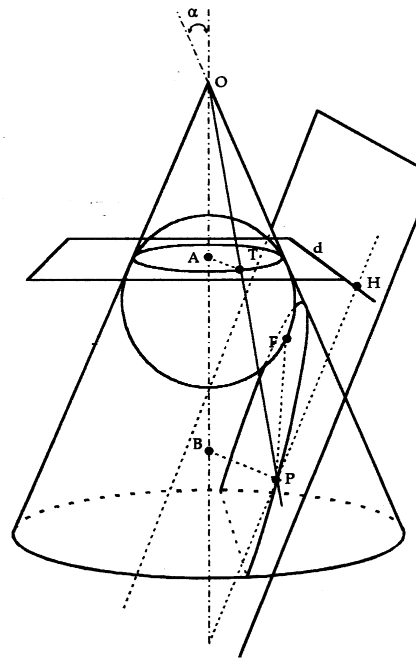
El plano de la circunferencia (c) corta al plano π según una recta d.



Tomemos un punto cualquiera P sobre la parábola y tracemos la generatriz del cono que pasa por P.

Esta generatriz es tangente a la esfera en un punto T. También la recta PF es tangente a la esfera.

Entonces,



$\overline{PT} = \overline{PF}$

Sea PH la perpendicular a d trazada desde P, proyectemos el segmento $\overline{PT}$ y el segmento $\overline{PH}$ sobre el eje del cono. Los dos tienen la misma proyección $\overline{AB}$ y como los dos forman el mismo ángulo α con el eje del cono, la longitud de esta proyección es:

$$\overline{AB} = \overline{PT}\cos\alpha = \overline{PH}\cos\alpha$$

Además:

$$\overline{PT} = \overline{PF} \text{ luego } \overline{PF}\cos\alpha = \overline{PH}\cos\alpha$$

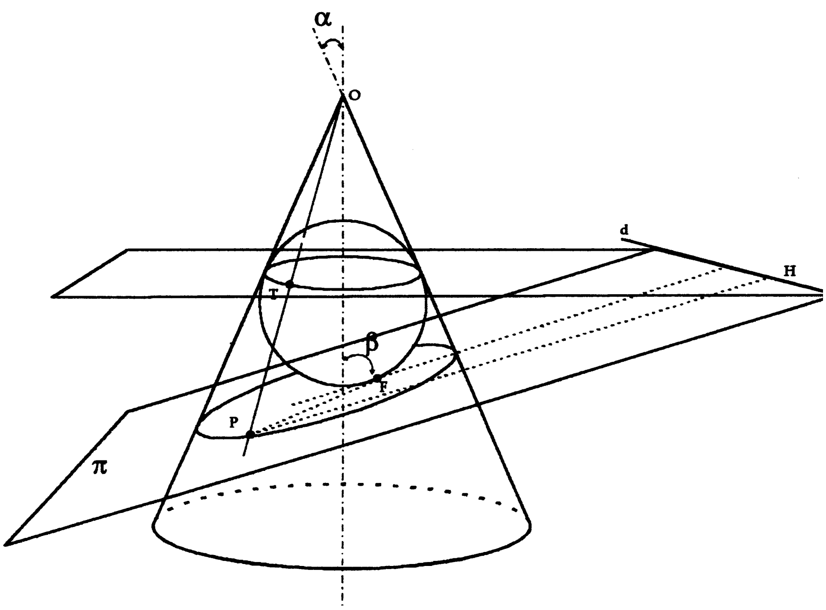
es decir:

$$\overline{PF} = \overline{PH} \text{ ya que } \cos\alpha \neq 0$$

Esto significa que la curva sección es efectivamente la parábola, F es su foco y d su directriz.

* * *

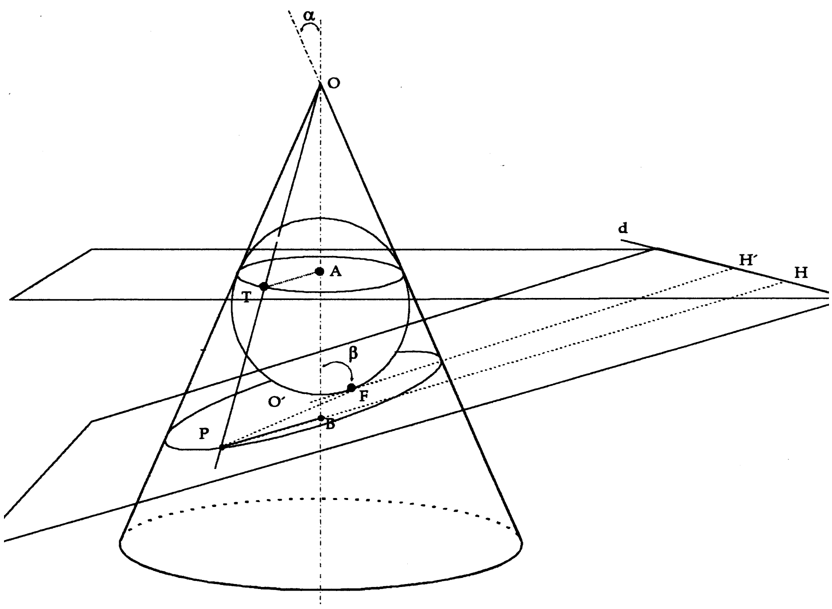
Hagamos el mismo estudio en el caso de la elipse.



Coloquemos la esfera tangente al cono y al plano π de la elipse. La intersección de esta esfera con el cono es la circunferencia (c) que está en un plano perpendicular al eje del cono. La intersección de la esfera con el plano π es el punto F.

Sea P un punto cualquiera de la elipse. Tracemos la generatriz OP. Esta recta es tangente a la esfera en un punto T. Entonces $\overline{PT} = \overline{PF}$.

Tracemos la recta PH perpendicular a la recta d. (Intersección del plano de la circunferencia (c) con el plano π). Siguiendo el mismo procedimiento usado en el caso de la parábola, vamos a proyectar el segmento $\overline{PH}$ y el segmento $\overline{PT}$ sobre el eje del cono.



Observa que $\overline{PT}$ y $\overline{PH}$ se proyectan sobre un mismo segmento $\overline{AB}$ ya que el plano de la circunferencia (c), donde están T y H, es perpendicular al eje del cono por el punto A.

Como el ángulo que forma PT con el eje del cono es el ángulo del cono α, tenemos que $\overline{AB} = \overline{PT}\cos\alpha$.

Por otra parte, cualquiera que sea el punto P, el segmento $\overline{PH}$ es siempre paralelo al segmento $\overline{O'H'}$, luego forma un ángulo β con el eje del cono. Este ángulo β depende de la inclinación del plano y no del punto P.

La proyección de $\overline{PH}$ sobre el eje del cono es entonces $\overline{PH}\cos\beta = \overline{AB}$.

Tenemos así la relación $\overline{AB} = \overline{PH}\cos\beta = \overline{PF}\cos\alpha$, (recuerda $\overline{PF} = \overline{PT}$).

De aquí obtenemos:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

Veamos qué significa ésto: $\overline{PF}$ y $\overline{PH}$ son las distancias de P a un punto F (foco) y a una recta d (directriz). α es el ángulo del cono y β es el ángulo que forma el plano π con el eje del cono, luego $\dfrac{\pi}{2} > \beta > \alpha$ ya que estamos suponiendo que el plano π corta al cono según una elipse. Entonces $\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ es constante y es menor que 1. (El coseno es decreciente entre 0 y $\frac{\pi}{2}$).

Esto nos permite dar la siguiente definición:

La Elipse: es el lugar geométrico de los puntos P de un plano cuya razón de distancias a un punto fijo F y a una recta d es constante y menor que 1.

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = k < 1.$$

La recta d se llama directriz. El punto F se llama *foco.*

Podemos escribir la definición de la *parábola* en este mismo lenguaje: una parábola es el lugar geométrico de los puntos P, del plano cuya razón de distancias a un punto fijo F y a una recta d es constante igual a uno.

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = k = 1$$

Falta por ver el caso de la hipérbola, la definición que completaría a las anteriores es la siguiente: una *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya razón de distancias a un punto fijo y a una recta es constante mayor que uno.

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = k > 1$$

El punto F se llama *foco* y la recta d *directriz.*

El hecho de que esta definición es cierta quedará como ejercicio (problema 4).

De esta manera tenemos las tres secciones del cono: elipse, hipérbola y parábola con una definición común: el lugar geométrico de los puntos del plano cuya razón de distancias a un punto fijo y a una recta es constante.

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = k$$

Si $k < 1$ la curva es una elipse.

Si $k = 1$ la curva es una parábola.

Si $k > 1$ la curva es una hipérbola.

La constante k se llama la *excentricidad* de la cónica.

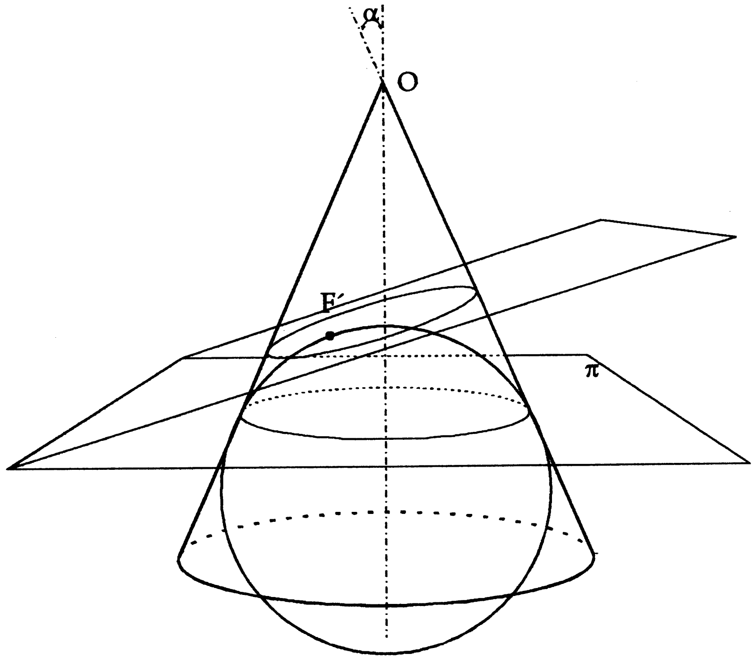
Resumiendo lo hecho hasta ahora tenemos:

a. Una definición métrica de las cónicas: elipse, hipérbola y parábola.
b. Otra definición de estas curvas como secciones del cono. Además probamos que en el caso de la parábola esta es la misma curva de la definición anterior.
c. Siguiendo el método del caso de la parábola, hemos podido encontrar nuevas propiedades de la elipse e hipérbola. Además, otra definición métrica dada por el cociente de las distancias de los puntos de la curva a un punto fijo (foco) y a una recta (directriz).
d. Nos falta probar que esta definición, o su equivalente como secciones del cono, es equivalente a la definición métrica (a) en el caso de la elipse y la hipérbola. Esta prueba es el Teorema de Dandelin y la haremos en el próximo capítulo.

EJERCICIOS

1. Dado un punto P arbitrario en una parábola, construya una tangente a la parábola por el punto P.
2. Demuestre el teorema relativo a los ángulos de incidencia y de reflexión en el caso de la parábola.
3. Considere un cono y un plano secante como en la figura. La sección que se obtiene es una elipse, coloque la esfera tangente al cono y al plano por debajo del plano.

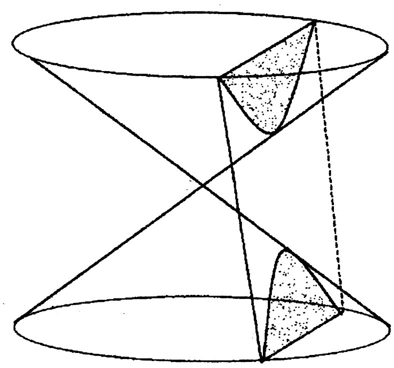
   El punto de tangencia F' debe ser el otro foco de la elipse y la directriz d' estará al otro lado de la elipse. Repita las mismas construcciones y razonamientos que hicimos anteriormente.



4. Considere un plano que corta a las dos alas de un cono. Defina foco y directriz de la curva obtenida, pruebe que

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \text{const.}{>}1$$

¿Quién es β en este caso?



5. Repita el problema (4) colocando la esfera tangente en la otra posición posible y repita las construcciones y razonamientos.
6. Adapte el estudio presentado en esta guía al caso de secciones planas de un cilindro. ¿Qué curvas obtiene?
7. Considere un cono con ángulo $\alpha = 30°$ ¿Qué valor debe tener el ángulo β, que forma un plano π con el eje del cono, para que la sección sea:

   a) Una parábola.

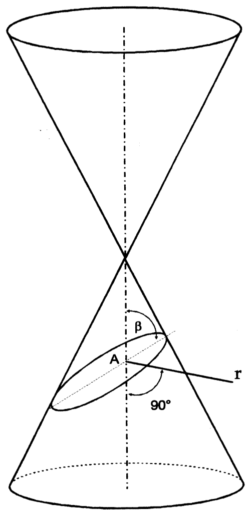
b) Una elipse de excentricidad $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \frac{1}{2}\right)$

c) Una hipérbola de excentricidad $\frac{9}{8}$ $\left(\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \frac{9}{8}\right)$

d) Una hipérbola de excentricidad 2.

e) Como conclusión de lo obtenido en d), ¿cuál es la cota superior de las excentricidades de las hipérbolas obtenidas de este cono? ¿Cómo sería esta cota si el ángulo a fuese mayor o menor?

8. Considere un cono y una recta r, perpendicular al eje del cono en un punto A. Imagine un plano π cualquiera que pase por esta recta se forma el ángulo β. Haciendo girar el plano alrededor de la recta r, el ángulo β pasa por todos los valores de 0 a 2π. Imagine las curvas que se forman. A medida que el plano gira, la curva en el espacio que se va deformando. ¿Para qué valores de β ocurre una "discontinuidad" en esa deformación?



9. Considere un cono de ángulo $\alpha = 75°$, ¿qué valor debe tener el ángulo β, que forma un plano π con el eje del cono, para que la sección sea una hipérbola de excentricidad 2 (compare este resultado con el problema 7. d).

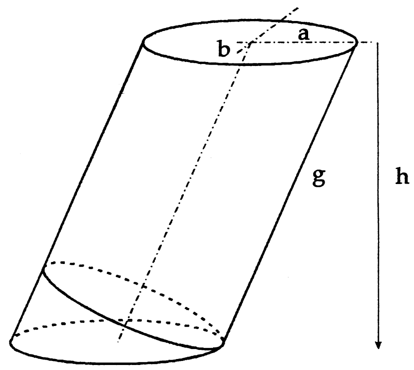
10. *a*) Pruebe que dos secciones del mismo cono, que tienen la misma excentricidad, son semejantes. (Recuerde que una semejanza es el producto de homotecia y transformación rígida).

    b) ¿Se puede decir lo mismo si las secciones son de conos de distinto ángulo?

11. Demuestre que el área de una elipse de semieje mayor a y semieje menor b está dada por la fórmula $A = \pi ab$.

    *Ayuda:*por el problema 6 usted sabe que una elipse se puede obtener como una sección plana de un cilindro. El radio del cilindro es $R = b$. El volumen del cilindro es $V = A \cdot h = \pi R^2 g$.

    ¿Quién es $\frac{g}{h}$?



12. Se corta a un cono del ángulo $\alpha = 30°$ por un plano que forma un ángulo de $45°$ con el eje del cono y a una distancia igual a $\sqrt{3}$ del vértice. Calcule:
    a) El eje mayor de la elipse. R: $3\sqrt{2}$
    b) El eje menor de la elipse. R: $\frac{\sqrt{6}}{2}$
    c) El área. R: $\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$
    d) La distancia entre los focos. R: $2\sqrt{3}$
    e) La excentricidad. R: $\frac{\sqrt{6}}{3}$
13. Para cualquier punto P de una elipse de focos F_1 y F_2 se tiene que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 4$, sabiendo además que la excentricidad de la elipse es $\frac{1}{2}$, halle la distancia entre un extremo del diámetro menor y la directriz.
    (Respuesta: 4).
14. ¿Qué valor debe tener la distancia entre un vértice de la elipse y su
    directriz para que la excentricidad sea $\frac{1}{4}$ y el diámetro mayor mida 4?
    (Respuesta: 6) (Vértices son los extremos del diámetro mayor).
15. En una elipse de excentricidad $\frac{1}{3}$ se tiene que$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 6$ para
    todos los puntos P de la elipse. Hallar la distancia entre los focos F_1 y F_2
    (Respuesta: 2).
16. Conociendo la distancia entre los focos de una elipse $\overline{F_1F_2} = 4$ y la
    excentricidad $E = \dfrac{1}{4}$, hallar el semi-eje mayor.
    (Respuesta: 8).
17. Dada una elipse de semieje mayor $a = 4$ y semieje menor $b = 2$, hallar su excentricidad $\left(E = \dfrac{\overline{PF}}{\overline{\overline{PH}}}\right)$. (**Respuesta**: $E = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$)

CAPíTULO 13

TEOREMA DE DANDELIN

El teorema de Dandelin permite demostrar que la sección plana de un cono es una de las curvas definidas en el capítulo No. 12, en los casos de elipse e hipérbola. El caso de la parábola ya fue probado en esa guía.

El teorema usa las dos definiciones siguientes:

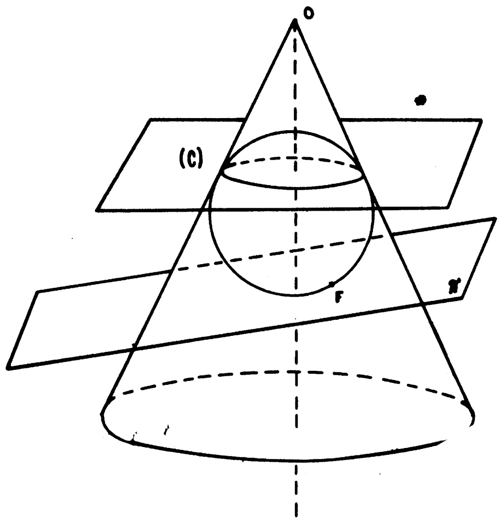
Una *elipse* es el lugar geométrico de los. puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano es constante.

Una *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es constante.

LAS ESFERAS DE DANDELIN

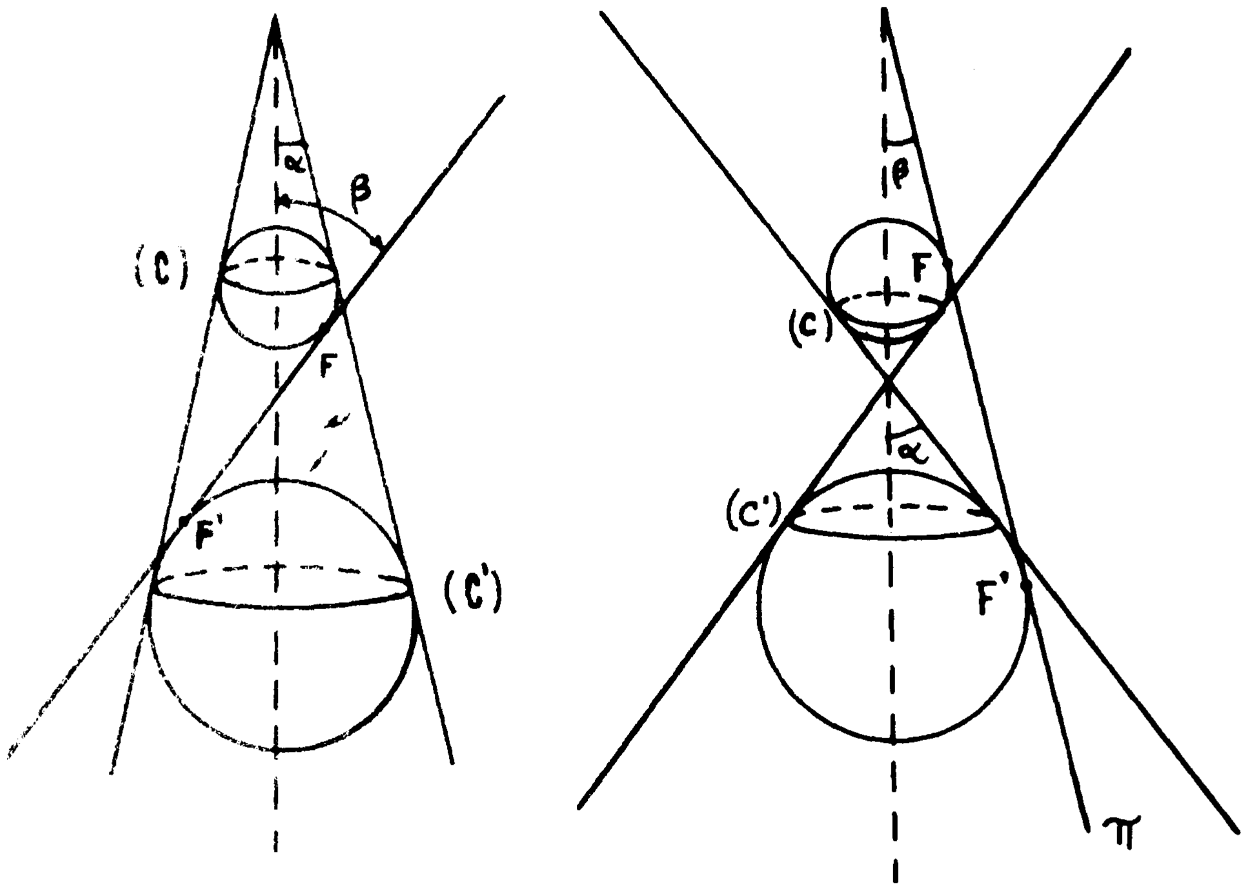
Sea un cono y un plano π que no pasa por su vértice.

En la guía anterior hemos visto que era posible colocar una esfera dentro del cono de manera que dicha esfera sea tangente al plano en un punto F, y además tangente al cono según una circunferencia (C) cuyo plano es perpendicular al eje del cono.



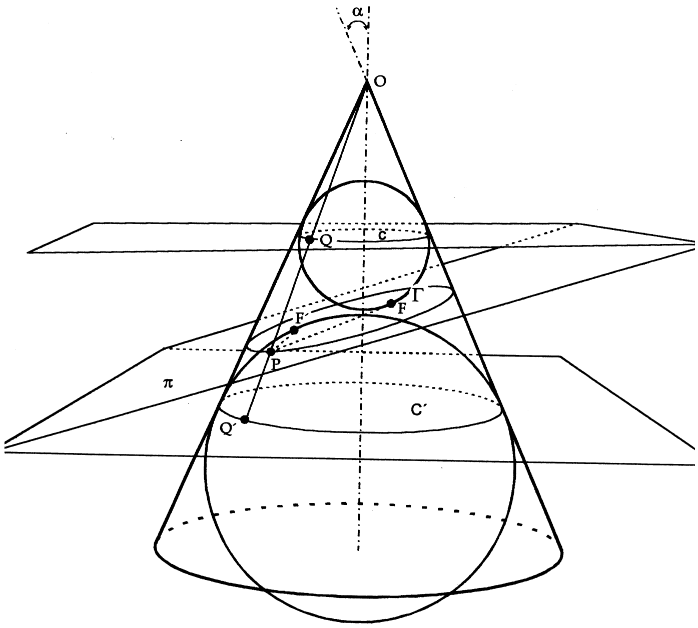
La idea de Dandelin fue colocar una segunda esfera tangente al cono y al plano, de manera que la primera esté colocada por "encima" del plano π y la segunda por "debajo" del plano π.
EI punto de contacto de la segunda esfera y del plano π lo llamamos F'.

Como se puede ver en la figura, esto no es posible sino en dos casos, cuando el ángulo β es diferente del ángulo α.



El caso $\beta > \alpha$**.** Colocamos las dos esferas. Sean (C) y (C') las circunferencias en las cuales las esferas y el cono son tangentes. Los puntos F y F' son los puntos de contacto de las esferas con el plano π. El plano π corta el cono según una curva (Γ). Queremos probar que (Γ) es una elipse.

Sea entonces P un punto de la intersección (Γ). Trazamos la generatriz OP. Esta recta corta a (C) en Q y a (C') en Q'.



$$\begin{aligned} \overline{PF} &= \overline{PQ} \\ \overline{PF'} &= \overline{PQ'} \\ \overline{PF} + \overline{PF'} &= \overline{PQ} + \overline{PQ'} \end{aligned}$$

PF y PQ son dos tangentes trazadas a partir de P a la esfera de "arriba" y por lo tanto son dos segmentos de igual longitud.

Por la misma razón PF' y PQ' son dos segmentos iguales.

1. $\overline{PF} = \overline{PQ}$
2. $\overline{PF'} = \overline{PQ'}$

Las igualdades 1. y 2. nos permiten escribir:

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = \overline{PQ} + \overline{PQ'} = \overline{QQ'}$$

$\overline{QQ'}$ es constante igual a la distancia entre (C) y (C') (¿porqué?)

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = C^{te}$$

pero esta igualdad no es otra cosa que la definición de una elipse.

Podemos enunciar el resultado:

Cuando $\beta > \alpha$, la sección plana del cono es una elipse definida por

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = C^{te}$$

El caso $\beta < \alpha$. Este caso se resuelve exactamente de la misma manera, lo dejamos como ejercicio. (Ejercicio No. 1.)

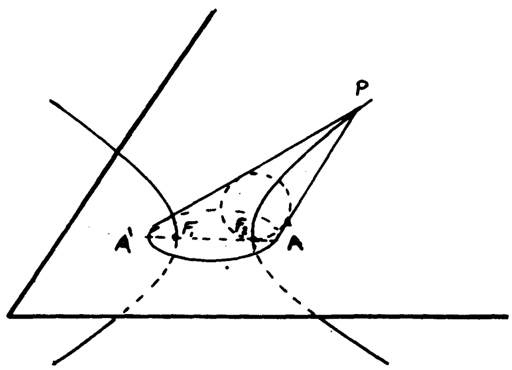
EJERCICIOS.

1. Pruebe que si $\beta < \alpha$, la sección es una hipérbola, según la definición métrica.
2. Sea un cono de ángulo $\alpha = 30°$. Un plano (P) corta este cono de manera que:
   I. el ángulo $\beta = 60°$
   II. la esfera de Dandelin de "arriba" tiene un radio r = 1.

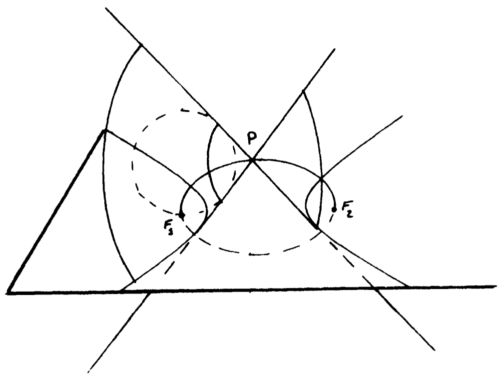
   Calcule:
   a) El radio de la otra esfera de Dandelin. R: $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3}$
   b) La distancia FA, siendo A y A' los puntos de la cónica sobre la recta (FF'). R: $FA = 1$
   c) La distancia del punto A a la recta intersección de los planos (π) y (C). R: $\sqrt{3}$
3. Dibujar en su plano la elipse obtenida en el ejercicio No. 2.
4. Demuestre, por el mismo método de esta guía que la sección obtenida al cortar un cilindro con un plano oblicuo, es una elipse.
5. Pruebe que el lugar geométrico de los vértices de los conos que pasan por una elipse dada es una hipérbola (en un plano perpendicular al plano de la elipse).

   Ayuda: Pruebe que

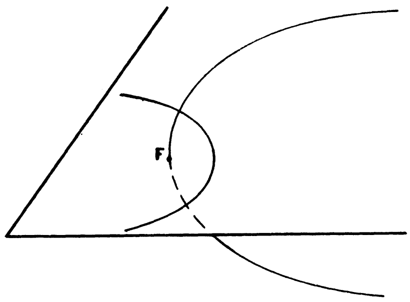
$$\overline{PA'} - \overline{PA} = \overline{F_2A'} - \overline{F_2A} = \overline{F_1F_2} = \text{cte.}$$



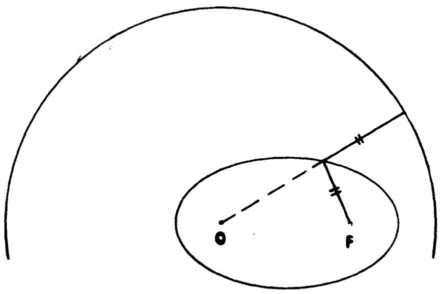
6. El lugar geométrico de los vértices de los conos que pasan por una hipérbola dada es una elipse.



7. El lugar geométrico de los vértices de conos que pasan por una parábola es otra parábola.



8. Demuestre que una elipse es el lugar geométrico de los puntos de un plano equidistantes de una circunferencia y de un punto F, interior a ella (Circunferencia Focal).



9. Se da una elipse cuya distancia focal es d, si la circunferencia focal tiene radio R, calcule el área de la elipse.

   Respuesta: $\frac{R}{4}\pi\sqrt{R^2 - d^2}$
10. Demuestre que una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de una circunferencia y de un punto F exterior a ella.
11. Lugar geométrico de los focos de las secciones parabólicas de un cono.
12. Lugar geométrico de los puntos P del espacio cuya suma de distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante. (Elipsoide de revolución.)

13. Lugar de los puntos P del espacio que equidistan de un plano π y de un punto F, situado fuera de π. (paraboloide de revolución.)
14. Lugar de los puntos P del espacio cuya diferencia de distancia a dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante. (Hiperboloide de dos hojas.)
15. ¿Qué superficie en el espacio se obtiene al hacer girar una elipse alrededor del eje de sus focos? ¿Y si se hace girar una hipérbola alrededor de $F_1\ F_2$? ¿Y una parábola alrededor de la perpendicular a la directriz por F?
16. Se corta un cono de ángulo α por un plano que corta a las dos alas del cono según un ángulo β $(\beta < \alpha)$. Conociendo el radio r de la esfera menor de Dandelin, halle el radio R de la esfera mayor.

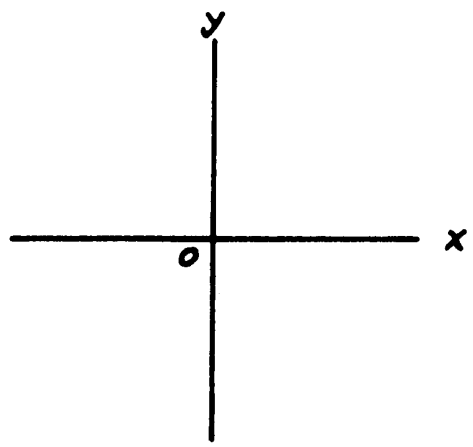
    (Respuesta: $R = r\,\dfrac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}$)
17. Un plano corta un cono de vértice V según una elipse. Si A y A' son los extremos del diámetro mayor de la elipse y si $\overline{VA'} = 6,\ VA = 2$ y la excentricidad de la elipse es $E = \frac{1}{2}$, calcule la distancia de A a la directriz.

    (Respuesta: 4)

CAPíTULO 14

CORDENADAS EN EL PLANO
SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS

Estableceremos una correspondencia biyectiva entre los puntos del plano y pares de números reales (x, y) de la siguiente manera. Sea O un punto cualquiera del plano. Tracemos por O dos rectas perpendiculares entre sí. Una de ellas la dibujamos horizontal y la llamamos *eje de las abscisas* o eje X, la otra la dibujamos vertical y la llamamos *eje de las ordenadas* o eje Y.

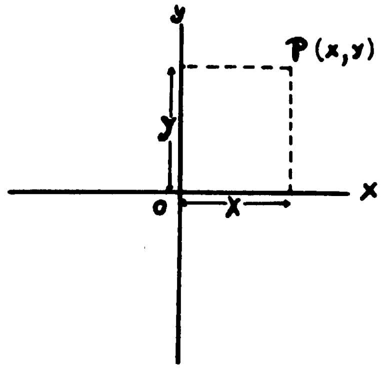


El punto O, punto de corte de los ejes X e Y se denomina origen. Eligiendo la misma unidad de medida sobre cada eje establecemos una biyección entre cada eje y los números reales, tal como lo hicimos en el capítulo No. 1.

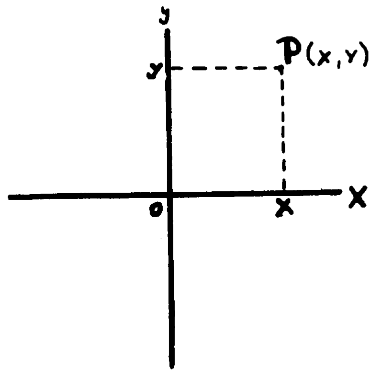
Sea P un punto cualquiera del plano. Si trazamos por P una recta paralela al eje Y, es decir, una recta vertical, ésta cortará el eje X en un único punto cuya abscisa se llamará abscisa de P y denotaremos por x.

De la misma forma, si trazamos por P una recta paralela al eje X, es decir, una recta horizontal, ésta cortará al eje Y en un único punto cuya abscisa recibe el nombre de *ordenada* de P y denotaremos por y.

Los números x e y reciben el nombre de coordenadas del punto P. Utilizaremos la notación $P(x, y)$ para indicar que los números x e y son las coordenadas del punto P del plano.



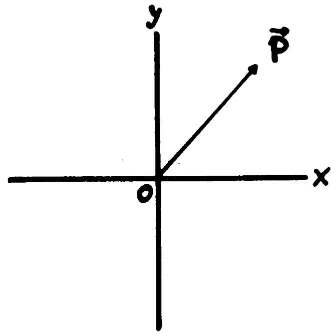
Recíprocamente, si tenemos un par de números reales (x, y) localizamos sobre los ejes X e Y puntos de coordenadas x e y respectivamente. Trazamos ahora por el punto x una paralela al eje Y y por el punto y una paralela al eje X, ambas rectas se cortarán en un punto P del plano, cuyas coordenadas serán, precisamente, los números x e y.



De esta forma a cada par de números reales (x, y) le asignamos un punto y sólo uno del plano y a cada punto P del plano le asignamos un par de números reales (x, y) y uno sólo.

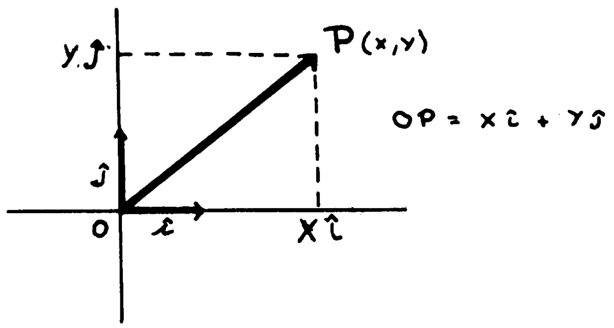
Esta idea de localizar un punto en el plano mediante dos ejes perpendiculares es debida a Descartes. Por esta razón los ejes X e Y y la unidad de medida reciben el nombre de sistema de coordenadas cartesianas en el plano.

También es posible pensar cada punto P del plano como el extremo de un vector de origen O, ese vector se llama el vector de posición del punto P.



De esta manera cada punto del plano determina un vector de origen O, y el extremo de cada vector de origen O localiza un punto, el punto terminal del vector.

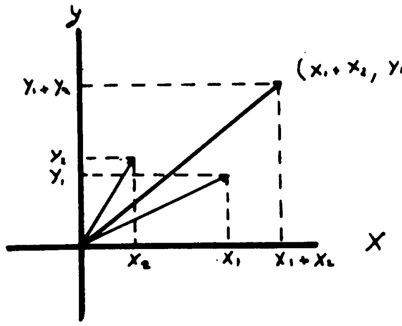
Cada vector que parte del origen del sistema de coordenadas se puede representar como suma de dos vectores en dirección de los ejes coordenados respectivamente. Si $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son los vectores de longitud 1 sobre los ejes X e Y respectivamente, y OP el vector que parte de O y termina en $P(x, y)$, entonces tendremos que $\overrightarrow{OP}= x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$



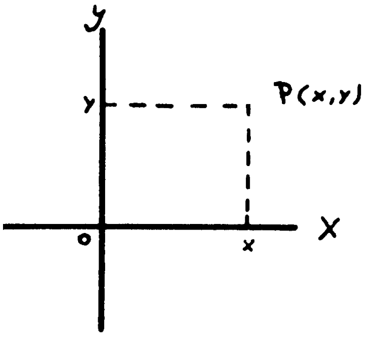
x e y son entonces las *componentes* del vector $\overrightarrow{OP}$.

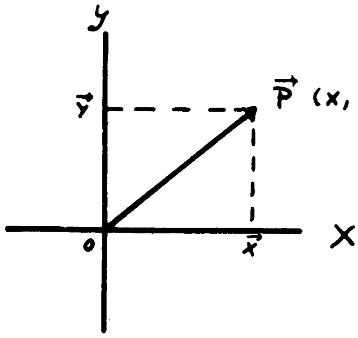
OBSERVACIÓN IMPORTANTE

Esta forma de visualizar los puntos del plano como un vector de componentes x e y, tienen la particularidad de que a la suma de vectores corresponde la suma de componentes de manera similar como en la correspondencia entre números reales y puntos de la recta, la suma de números corresponde a la suma de segmentos (capítulo 1).



NOTACIÓN. En adelante denotaremos los puntos del plano tanto por $P(x,y)$ como por el vector de posición $\overrightarrow{OP}$ que escribiremos simplemente **P**, quedando sobreentendido que todos los vectores que consideramos tienen su origen en O.

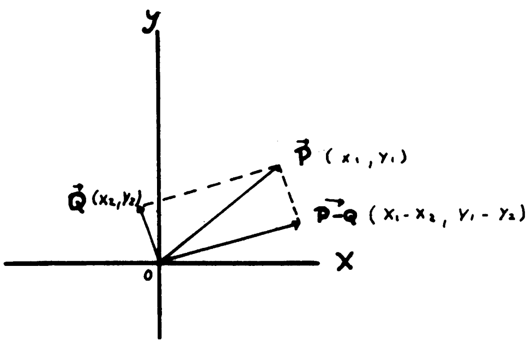




Veremos ahora cómo el lenguaje de las coordenadas se puede utilizar para describir la distancia entre dos puntos, ángulos entre vectores, subconjuntos del plano, etc.

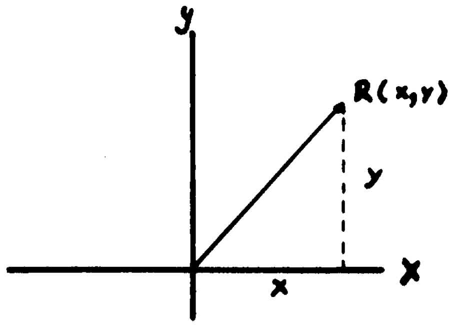
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. Queremos obtener la distancia entre dos puntos dadas sus coordenadas. Sean $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$ dos puntos arbitrarios del plano.

La distancia entre P y Q va a ser entonces igual a la longitud del vector **P-Q** cuyas coordenadas son (x_1-x_2, y_1-y_2)



Dado un vector arbitrario $R(x,y)$ su longitud nos la da el Teorema de Pitágoras:

$\sqrt{x^2+y^2}$

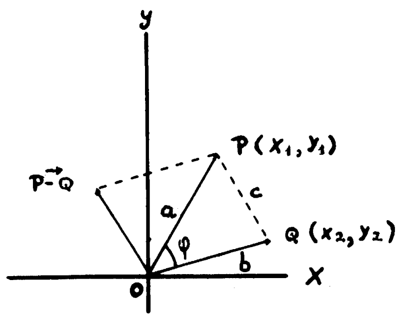


Por lo tanto la distancia entre $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es igual a:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES. Supongamos ahora que queremos hallar el ángulo entre dos vectores, conociendo sus componentes. Sean $\mathbf{P}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{Q}(x_2, y_2)$ dos vectores arbitrarios del plano, de longitudes:

$$a = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \text{ y } b = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$



Por el teorema del coseno tenemos que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ba\cos\varphi$ donde c es la longitud del vector $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$, es decir $c = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Despejando $\cos\alpha$ de la ecuación de arriba obtenemos,

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]}{2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2}},$$

desarrollando los cuadrados y cancelando algunos términos tenemos:

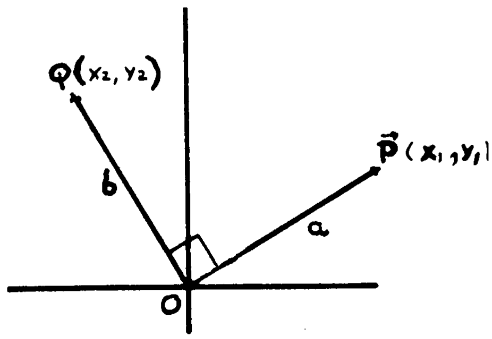
$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

conociendo el $\cos\varphi$ podemos calcular el ángulo α entre los dos vectores.

Observación. Lo que está en el denominador de la fórmula del $\cos\varphi$ es el producto de las longitudes de los vectores en consideración.

El denominador es no nulo, a menos que uno de los vectores fuese nulo, pero entonces no tiene sentido hablar de ángulo.

PERPENDICULARIDAD DE VECTORES. Una pregunta que se nos puede ocurrir es ¿Cuándo dos vectores $\mathbf{P}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{Q}(x_2, y_2)$, no nulos, son perpendiculares?



Dos vectores son perpendiculares si y sólo si el coseno del ángulo entre los dos es cero.

Luego $\cos\varphi = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{ab} = 0$, y esto ocurre sólo si $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$, por lo tanto la condición y suficiente para que los dos vectores $P(x_1, y_1)$ $Q(x_2, y_2)$ no nulos sean perpendiculares es:

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

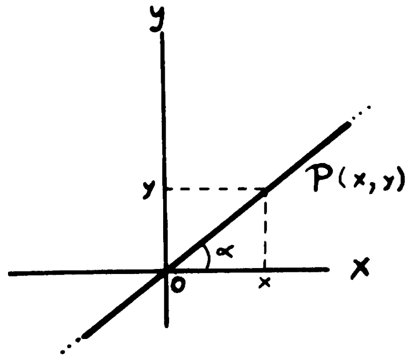
SUBCONJUNTOS DEL PLANO

Utilizando coordenadas vamos a caracterizar algunos subconjuntos del plano tales como la recta, la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola.

Hallaremos la ecuación de cada curva, es decir, una relación entre las coordenadas x e y de los puntos de la curva, de manera que sólo las coordenadas de sus puntos satisfagan la relación.

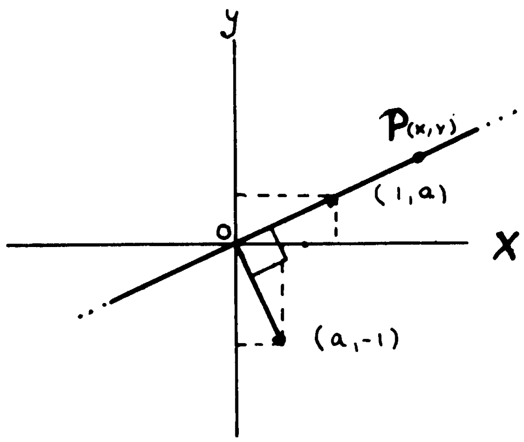
LA RECTA. Queremos encontrar la ecuación general de la recta. Si L es una recta arbitraria, queremos hallar una ecuación en x y en y, que caracterice la recta. Es decir, si un punto $P(x, y)$ está sobre la recta L entonces (x, y) satisface la ecuación, y si un par arbitrario (x, y) satisface la ecuación entonces $P(x, y)$ está sobre la recta L.

Comencemos primero, por mayor sencillez, por una recta que pase por origen O.



Vemos que un punto $P(x, y)$, con $x \neq 0$, está sobre la recta sólo si $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$. Sea $a = \operatorname{tg}\alpha$, a es un número constante. Luego la ecuación $y = ax$ representa una recta que pasa por el origen (el punto $(0,\ 0)$ satisface la ecuación).

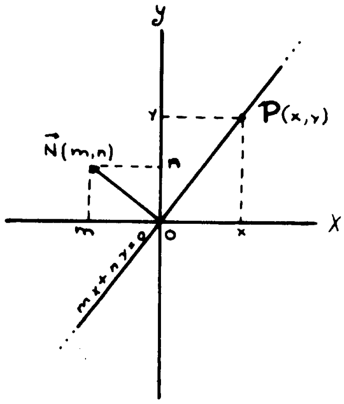
La ecuación $y = ax$, se puede escribir también como $ax - y = 0$. Esta ecuación nos dice que el vector $(a, -1)$ es perpendicular a $\mathbf{P}(x, y)$, lo que implica que la recta es perpendicular al vector $(a, -1)$. (Recuerde la condición para que dos vectores sean perpendiculares).



Tenemos entonces que el punto $P(x, y)$ está sobre la recta sólo si $\mathbf{P}(x, y)$ es perpendicular al vector $(a, -1)$ o a cualquier múltiplo de $(a, -1)$.

Observe que si tenemos en general un vector arbitrario $\mathbf{N}(m, n)$ perpendicular a la recta y no nulo $\mathbf{N} \neq 0$, cualquier punto $\mathbf{P}(x, y)$ de la recta satisface la ecuación $mx + ny = 0$. Recíprocamente cualquier par (x, y) que satisfaga la ecuación, representa un vector perpendicular a $\mathbf{N}(m, n)$, y por lo tanto tiene que estar en la recta.

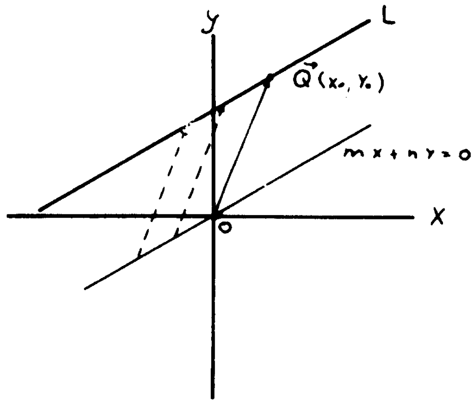
En conclusión, se tiene que $mx + ny = 0$ es la ecuación general de una recta que pasa por el origen.



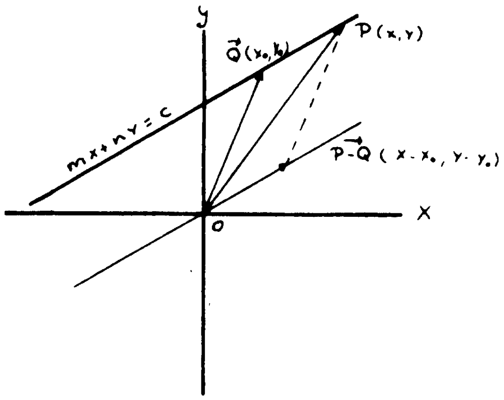
Observación: Si $\mathbf{N}(m, n)$ es perpendicular a la recta, $ax - y = 0$ y $n \neq 0$, entonces $-\frac{m}{n} = a$.

Veamos ahora el caso general, de una recta arbitraria L que no pase necesariamente por el origen. Consideremos un punto cualquiera, $Q(x_0, y_0)$, de esa recta.

Consideremos la recta paralela a ella que pase por el origen, de ecuación $mx + ny = 0$. La recta L es la trasladada de su paralela por el origen según el vector $Q(x_0,\, y_0)$



Si $P(x, y)$ es un punto arbitrario de L, entonces el vector diferencia **P - Q** está sobre su paralela por 0, luego sus coordenadas $(x - x_0, y - y_0)$, satisfacen su ecuación, es decir, $m(x - x_0) + n(y - y_0) = 0$



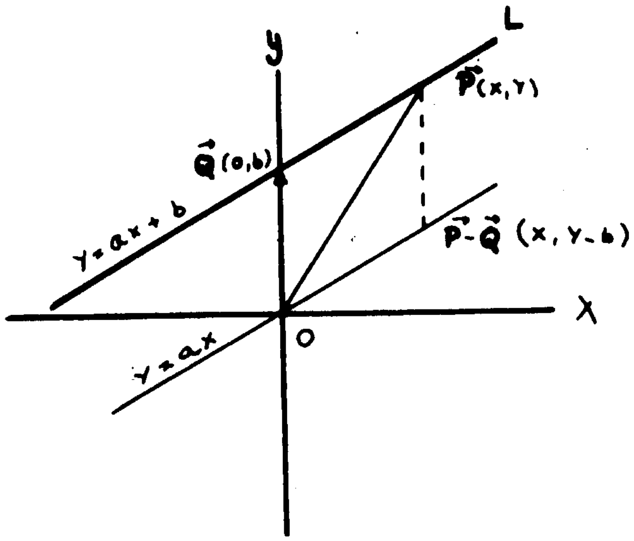
Tenemos que $P(x, y)$ está sobre la recta L sólo si

$$m(x - x_0) + n(y - y_0) = 0,$$

o lo que es lo mismo si $mx + ny = c$ (con $c = mx_0 + ny_0$).

Esta es la ecuación más general de la recta.

NOTA. Si hubiéramos tomado $ax - y = 0$ como ecuación de la recta paralela por O, y $Q(0, b)$ el punto de corte con el eje Y de la recta L, entonces las coordenadas de $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$ $(x, y - b)$ satisfacen la ecuación de la recta por el origen. Es decir $ax - (y - b) = 0$, o la conocida ecuación $y = ax + b$



Observe que las ecuaciones de la recta que hemos obtenido se deducen una de otra multiplicando ambos miembros por una constante. Por ejemplo:

$mx + ny = c$ con $n \neq 0$ (dividiendo por n)

$\dfrac{m}{n}x + y = \dfrac{c}{n}$ (despejando y)

$y = -\dfrac{m}{n}x + \dfrac{c}{n}$

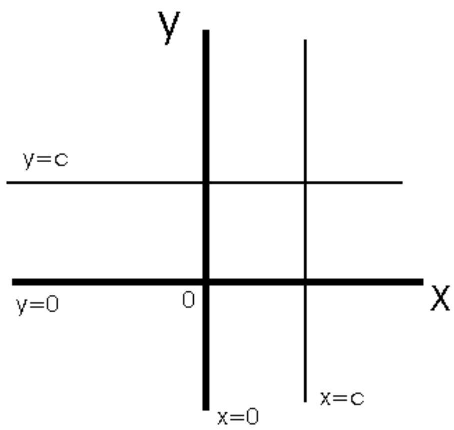
$y = ax + b$ (con $a = -\dfrac{m}{n}$ $b = \dfrac{c}{n}$)

Por lo tanto toda ecuación de la forma $mx + ny = c$ con $n \neq 0$ se puede poner de la forma $y = ax + b$ y viceversa.

Veamos ahora algunos casos particulares de rectas. ¿Cómo es la ecuación de una recta paralela a un eje de coordenadas?

Una recta es paralela al eje X cuando todos sus puntos equidistan del eje X. Esto significa que la ordenada de todos sus puntos es la misma, es constante. Por eso, la ecuación de una recta paralela al eje X es $y = c$ donde c es una constante.

De manera análoga, se ve que la ecuación de una recta paralela al eje Y es $x = c$.



Observamos que estos casos están incluidos en la ecuación más general de la recta $mx + ny = c$. Simplemente escogiendo $m = 0$ y $n = 1$ en el primer caso, y $m = 1$, $n = 0$ en el segundo caso. Sin embargo el caso $x = c$ no está incluido en $y = ax + b$; en el sentido de que no es posible. hallar dos números, a y b, tales que la ecuación $y = ax + b$ se reduzca a $x = c$.

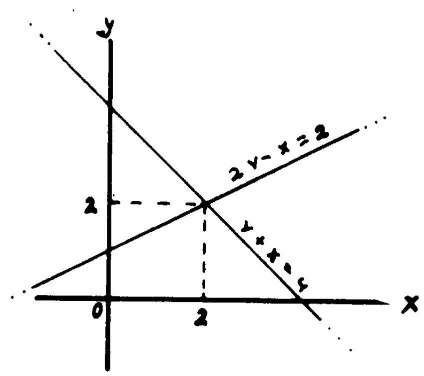
Podemos decir que la ecuación $y = ax + b$ representa todas las rectas excepto las verticales. En todo caso, podemos afirmar que una ecuación lineal general, es decir una ecuación del tipo $mx + ny = c$. representa cualquier recta en el plano.

VEAMOS ALGUNOS PROBLEMAS.

1. Hallar el punto de intersección de las dos rectas representadas por: $2y - x = 2$; $y + x = 4$. Como estamos buscando el punto $P(x, y)$ común a ambas rectas, (x, y) tiene que satisfacer ambas ecuaciones. Por lo que el problema se reduce a resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables. Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 2y - x &= 2 \\ y + x &= 4 \end{aligned}$$

Obtenemos fácilmente $x = 2$, $y = 2$, y así $P(2, 2)$ es el punto de intersección de las rectas

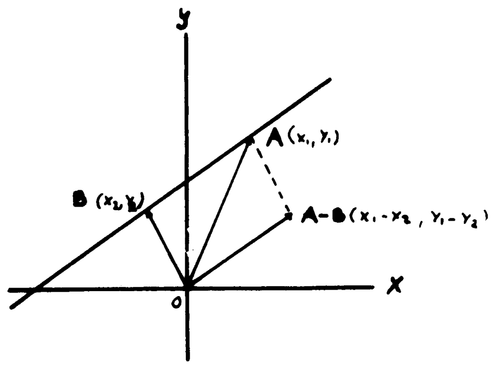


Con este ejemplo podemos ver cómo los problemas geométricos se traducen en problemas de álgebra.

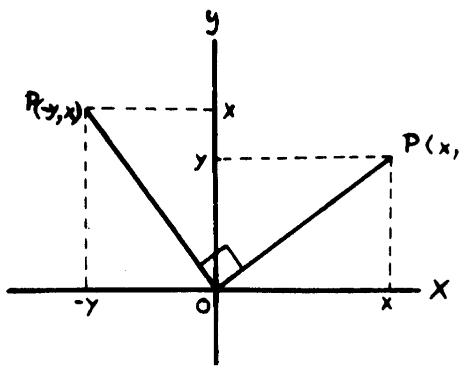
2. Sabemos que dos puntos cualesquiera determinan una recta, conociendo las coordenadas de éstos, ¿cómo se halla la recta?

   Sean $A(x_1, y_1)$ Y $B(x_2, y_2)$ dos puntos arbitrarios del plano. Queremos hallar la ecuación de la recta que pasa por A y B.

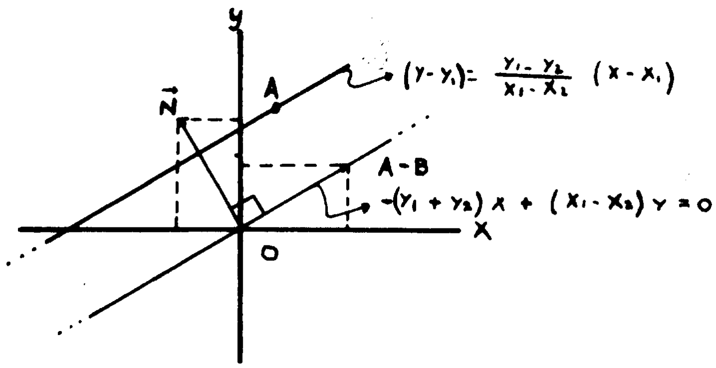
   Observemos que el vector **A - B** es paralelo a esa recta. Para hallar la ecuación de la paralela por 0 de la recta buscada basta hallar un vector perpendicular a **A - B.**



En general, un vector perpendicular al vector $P(x.y)$ es el vector $P'(-y, x)$ ya que $-xy + xy = 0$



Las coordenadas de **A - B** son $(x_1 - x_2,\ \ y_1 - y_2)$. Por lo tanto un vector perpendicular a **A-B** es **N**$(-y_1+y_2,\ \ x_1-x_2)$. Luego la ecuación de la paralela por cero es $(-y_1+y_2)x+(x_1+x_2)y = 0$

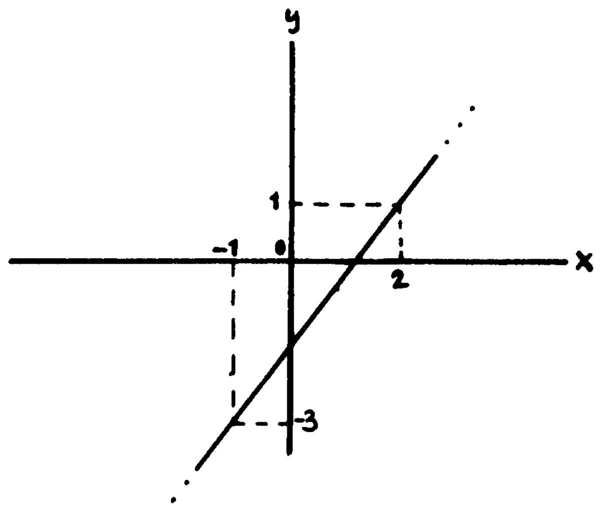


Entonces la recta que pasa por A y B tiene por ecuación

$$(-y_1 + y_2)(x - x_1) + (x_1 - x_2)(y - y_1) = 0 \text{ o sea } y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\,(x - x_1) \text{ si } x_1 \neq x_2$$

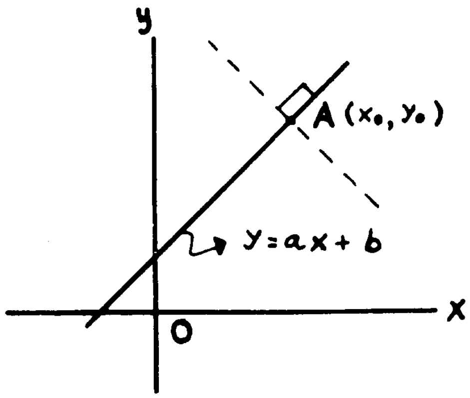
Veamos un ejemplo numérico:

La ecuación de la recta que pasa por $(2, 1)$ y por $(-1, -3)$ es $y - 1 = \dfrac{4}{3}\,(x - 2)$ ó $y = \dfrac{4}{3}\,x - \dfrac{5}{3}$

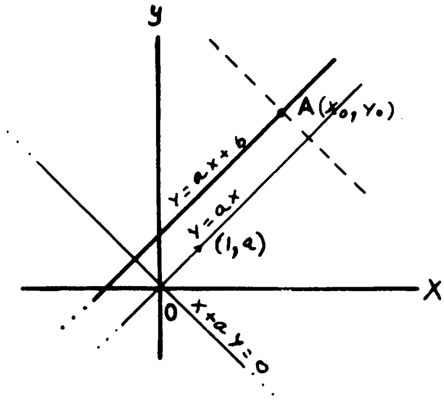


Veamos el siguiente problema:

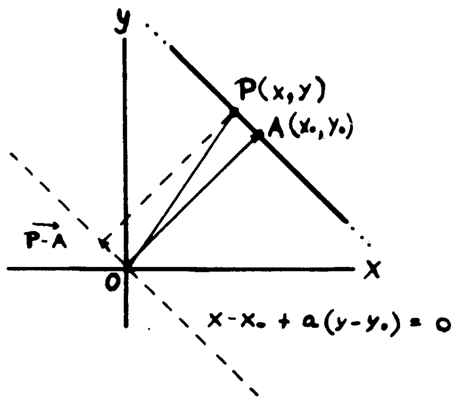
3. Hallar la ecuación de una recta perpendicular a otra de ecuación $y = ax + b$ por un punto $A(x_0,\ y_0)$.



La recta $y = ax$ paralela a la dada y pasa por el origen. Como el vector $(1, a)$ está sobre esta recta, $x \cdot 1 + ay = 0$ representa una recta por el origen paralela a la que buscamos.



$P(x, y)$ está en la recta buscada sólo si $(P - A)(x - x_0, y - y_0)$ está en su paralela por el origen, es decir, si $x - x_0 + a(y - y_0) = 0$. Esta es la recta perpendicular a la dada que pasa por $A(x_0, y_0)$.



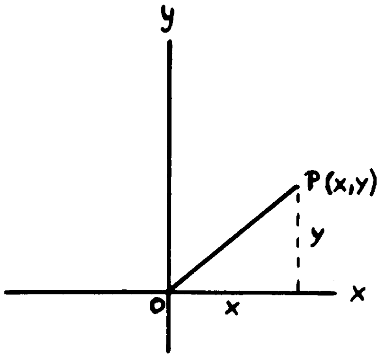
Por ejemplo, dada la recta $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Hallar la perpendicular por $A(1, 2)$. Su ecuación será:

$$x - 1 + \frac{1}{2}(y - 2) = 0 \quad \text{ó bien} \quad y = -2x + 4$$

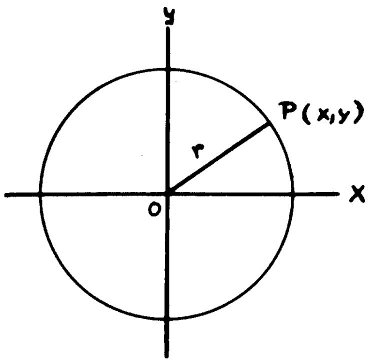
LA CIRCUNFERENCIA. Vamos ahora a hallar la ecuación de una circunferencia de centro c y radio r. Habíamos visto que la distancia entre dos puntos $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2y_2)$ está dada por

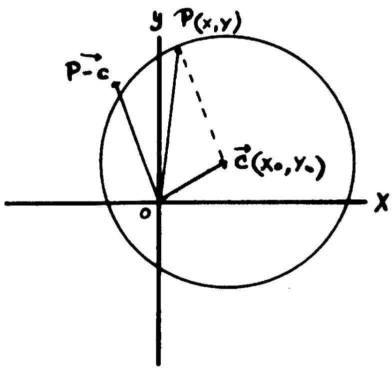
$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

En particular la distancia de un punto $P(x, y)$ al origen es $\sqrt{x^2 + y^2}$



Si suponemos que la circunferencia tiene centro O y radio r entonces todos sus puntos están a una distancia r del centro, es decir, satisfacen la ecuación $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ o bien $x^2 + y^2 = r^2$. Viceversa, cualquier punto P que satisfaga la ecuación está en la circunferencia.





Sea ahora una circunferencia de radio r y centro $C(x_0, y_0)$. Si $P(x, y)$ es un punto genérico de la circunferencia el vector **P-C** tiene longitud r. Como las coordenadas de **P-C** son $(x - x_0, y - y_0)$ su longitud es $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$ ó $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ que es la ecuación de la circunferencia.

Resolvamos ahora el siguiente problema:

Hallar los puntos de intersección de una circunferencia y una recta. Este problema equivale a resolver un sistema del tipo

$$\begin{aligned} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 &= r \\ ax+by &= c \end{aligned}$$

Es decir, hallar el punto $P(x,y)$ que satisfaga ambas ecuaciones. El sistema puede tener dos soluciones correspondientes a dos puntos de corte, o una solución si la recta es tangente, o ninguna solución si la recta es exterior a la circunferencia.

Veamos los siguientes ejemplos numéricos:

1. Hallar los puntos de corte entre la circunferencia

$$(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{9}{4} \text{ y la recta } y=x+\frac{1}{2}.$$

Resolvamos el sistema

$$\begin{aligned} (x-2)^2+(y-1)^2 &= \tfrac{9}{4} \\ y &= x+\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

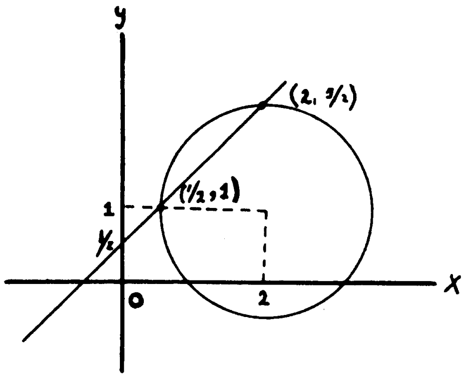
Sustituyendo la segunda ecuación en la primera, obtenemos

$$(x-2)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4} \Rightarrow 2x^2-5x+2=0,$$

resolviendo la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} &\Rightarrow\ y &= 1 \\ x &= 2 &\Rightarrow\ y &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

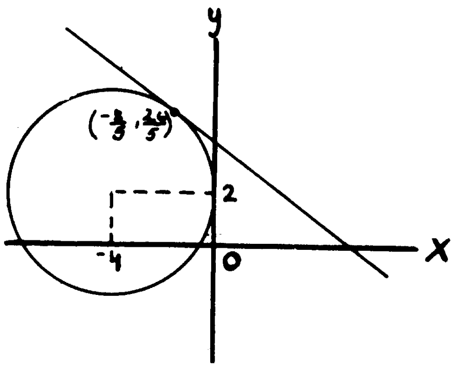
los puntos de corte son $\left(\frac{1}{2},1\right)$, $\left(2,\frac{5}{2}\right)$,



2. Hallar los puntos de corte entre la circunferencia

$$(x+4)^2+(y-2)^2=16 \text{ y la recta } y=-\frac{3}{4}x+4$$

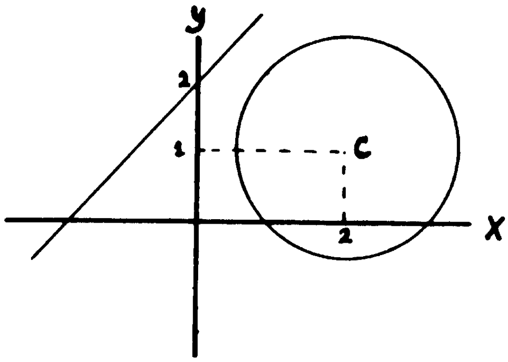
Resolviendo el sistema de la misma manera obtenemos $x = -\dfrac{8}{5}$, $y = \dfrac{26}{5}$, y el punto de corte es uno solo $\left(-\dfrac{8}{5}, \dfrac{26}{5}\right)$



3. Hallar el punto de corte entre la circunferencia

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{9}{4} \ \text{ y la recta } \ y = x + 2$$

Resolviendo el sistema de igual forma, resulta una ecuación de segundo grado con soluciones imaginarias, por lo que el sistema no tiene solución y por lo tanto la recta y la circunferencia no se cortan.

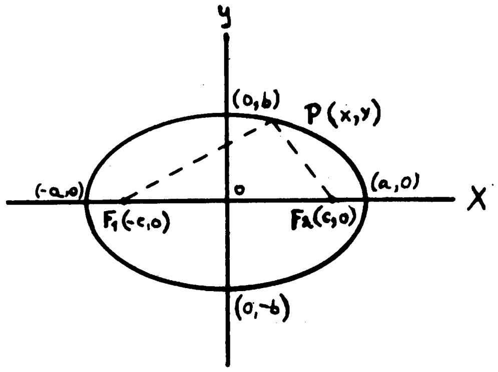


SECCIONES CONICAS

Pasemos a describir las secciones cónicas en el lenguaje de las coordenadas. Queremos hallar la relación entre x e y que caracterice los puntos de una elipse, hipérbola y parábola.

LA ELIPSE. La elipse es el conjunto de puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.

Para mayor sencillez, supongamos que el centro de coordenadas 0, es el centro de la elipse, y que los focos están sobre el eje X con coordenadas $F_1(-C, 0)$ y $F_2(C, 0)$ respectivamente.



Por la definición dada $d(P_1F_1) + d(P_2F_2) =$ constante. Llamamos esta constante $2a$, entonces tendremos

$$\sqrt{(x+C)^2+y^2} + \sqrt{(x-C)^2+y^2} = 2a$$

que es la ecuación de la elipse, pero que trataremos de expresarla en forma más cómoda eliminando los radicales.

$$\sqrt{(x-C)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+C)^2+y^2}$$

y elevando al cuadrado,

$$x^2 - 2Cx + C^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+C)^2+y^2} + x^2 + 2Cx + C^2 + y^2$$

de donde $\quad a\sqrt{(x+C)^2+y^2} = a^2 + Cx.$
Elevando nuevamente ambos miembros al cuadrado

$$a^2(x^2 + 2Cx + C^2 + y^2) = a^4 + 2a^2Cx + C^2x^2$$

de donde,

$$\begin{aligned} a^2x^2 - C^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2C^2 \\ x^2(a^2 - C^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - C^2). \end{aligned}$$

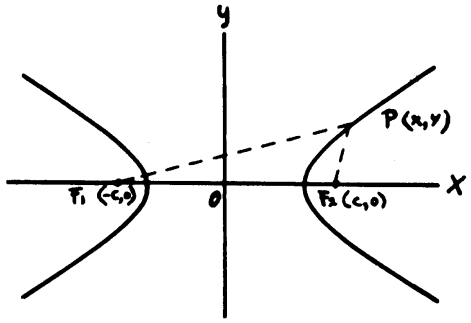
Como la suma, $PF_1 + PF_2 = 2a$, de dos lados del triángulo es mayor que el tercer lado $F_1F_2 = 2C$, se tiene que $a > C$ y podemos, poner $a^2 - C^2 = b^2$, entonces $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ y dividiendo por a^2b^2 obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ la forma simplificada}$$

De esta ecuación podemos ver que la curva es simétrica respecto a ambos ejes coordenados y los puntos de intersección con los ejes son $(\pm a, 0)$ y $(0, \pm b)$.

LA HIPÉRBOLA. La hipérbola es el conjunto de todos los puntos del plano cuya diferencia de distancia a dos puntos fijos llamados focos es constante.

Supongamos que los focos de la hipérbola están sobre el eje X, con coordenadas $F_1(-C,0)$ y $F_2(C,0)$ respectivamente.



tomando la constante igual a $2a$, $a>0$, tenemos que: $d(PF_1)-d(PF_2)=2a$ ó $d(PF_1)-d(PF_2)=-2a$ La 2da. ecuación es como la 1ra., con $2a$ reemplazada por $-2a$. Observe que el signo depende de la rama de la curva donde está P. Podemos escribir entonces:

$$\sqrt{(x+C)^2+y^2}-\sqrt{(x-C)^2+y^2}=\pm 2a \;\Rightarrow\; \sqrt{(x+C)^2+y^2} \;=\; \sqrt{(x-C)^2+y^2}\pm 2a,$$

elevando al cuadrado,

$$\begin{aligned} (x+C)^2+y^2 &= (x-C)^2+y^2\pm 4a\sqrt{(x-C)^2+y^2}+4a^2; \\ x^2+2xC+C^2+y^2 &= x^2-2Cx+C^2+y^2+4a^2\pm 4a\sqrt{(x-C)^2+y^2} \end{aligned}$$

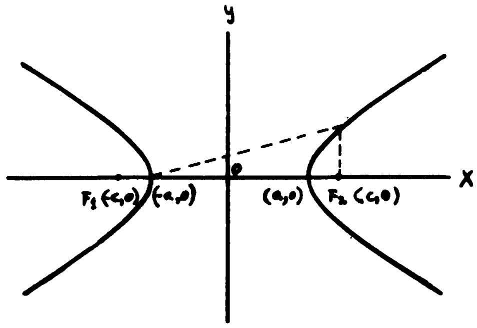
o sea, $\pm a\sqrt{(x-C)^2+y^2}=Cx-a^2$,

elevando al cuadrado, $$\begin{aligned} a^2(x^2-2xC+C^2+y^2) &= C^2x^2-2a^2Cx+a^4 \\ x^2(a^2-C^2)+a^2y^2 &= a^2(a^2-C^2) \end{aligned}$$

Ahora tenemos que a^2-C^2 es negativo, porque la diferencia de dos lados del triángulo F_1F_2P es más pequeña que el tercero: $2a<2C$, luego $a^2<C^2$. Por lo tanto podemos poner $C^2-a^2=b^2$ y la ecuación se transforma en $x^2b^2-a^2y^2=a^2b^2$ y dividiendo entre a^2b^2 obtenemos la forma simplificada de la ecuación:

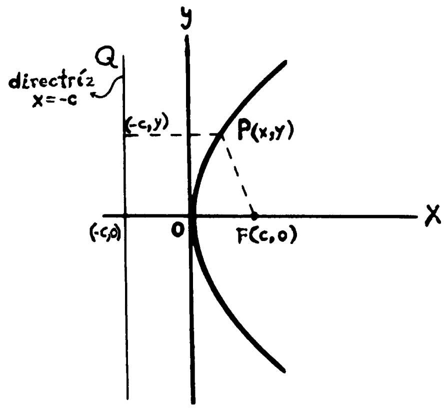
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

La hipérbola como la elipse es simétrica con respecto a los ejes, no intersecta al eje Y, y corta al eje X en $(a,0)$ y $(-a,0)$.



LA PARÁBOLA. La parábola es el conjunto de los puntos del plano equidistantes de un punto dado y una recta dada. El punto dado se denomina foco de la parábola y la recta directriz de la parábola.

Fijemos las coordenadas de manera que la directriz sea paralela al eje Y, la recta $x = -C$, y el foco sobre el eje X con coordenadas $F(C, O)$. El origen es el punto medio entre el foco y la directriz.



por definición, $d(P,Q) = d(P,F) \Rightarrow \sqrt{(x+C)^2} = \sqrt{(x-C)^2 + y2}$
elevando al cuadrado,

$$\begin{aligned} x^2 + 2xC + C^2 &= x^2 - 2Cx + C^2 + y^2 \\ y^2 &= 4Cx \end{aligned}$$

Esta ecuación debe ser satisfecha por todo punto de la parábola y recíprocamente todo punto que satisface la ecuación está en la parábola.

La parábola es simétrica con respecto al eje X. El eje de simetría de la parábola se denomina eje de la parábola. El punto sobre este eje entre el foco y la directriz, está sobre la parábola, ya que equidista del foco y de la directriz.
Este punto se denomina vértice de la parábola.

EJERCICIOS

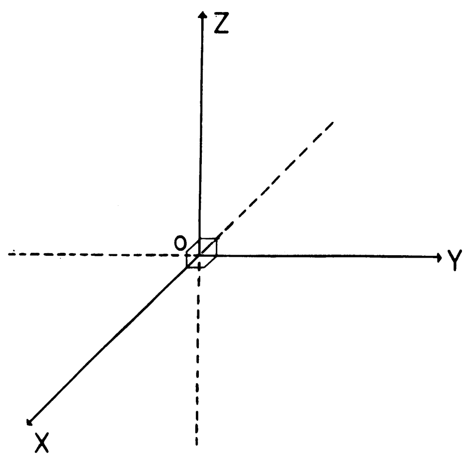
1. Sabiendo que el punto $(9,2)$ divide al segmento que determinan los puntos $P_1(6,8)$ y $P_2(x_2,y_2)$ en la relación $r=\dfrac{3}{7}$, hallar las coordenadas de P_2.
2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P(-1,5)$ y es paralela a la recta que pasa por $P(-2,1)$ y $P(-3,2)$.
3. a) Encontrar la recta L que pasa por $A(-2,2)$ y que es perpendicular a la recta $L':2x+y=4$.
   b) Encontrar el punto B donde las rectas L y L' de la parte a) se intersectan.
   c) Usando el resultado de la parte b) encontrar la distancia del punto A a la recta L' de la parte a).
4. Hallar la pendiente y la ordenada en el origen de la recta $2y+3x=7$.
5. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto en el cual la recta $2x-3y+5=0$ corta al eje X y que pasa por el punto donde la recta $5x-y+2=0$ corta al eje Y.
6. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por $(2,3)$ y $(-1,1)$ y cuyo centro está situado en la recta $x-3y-11=0$.
7. Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $(x-1)^2+(y+3)^2=25$ en el punto $(4,1)$.
8. Encontrar la ecuación de la elipse que tiene centro $C(0,0)$, foco $F(0,2)$ y semieje mayor de longitud $a=4$.
9. Hallar la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $\left(0,-\dfrac{4}{3}\right)$ y directriz la recta $y-\dfrac{4}{3}=0$
10. Hallar la ecuación del conjunto de puntos cuya diferencia de distancia a los puntos fijos $(-6,-4)$ y $(2,-6)$ es igual a 6.
11. En el capítulo 12 se definió la excentricidad de las cónicas. Demuestre que la excentricidad de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ es $\dfrac{c}{a}$, donde c es la abcisa del foco F_2 (Ver capítulo 12 Pb 17.)
12. Demuestre que la ecuación de las dos directrices de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ son las rectas $x=\pm\dfrac{a^2}{c}$.
13. Encuentre los focos de la hipérbola de la ecuación $x^2-2y^2=1$
14. La hipérbola de la ecuación $x^2-y^2=1$ se llama hipérbola equilátera; determine las coordenadas de sus focos.

CAPíTULO 15

COORDENADAS EN EL ESPACIO

SISTEMA DE COORDENADAS EN EL ESPACIO

Estableceremos una correspondencia biyectiva entre los puntos del espacio y los triples de números reales (x, y, z) de la siguiente manera.

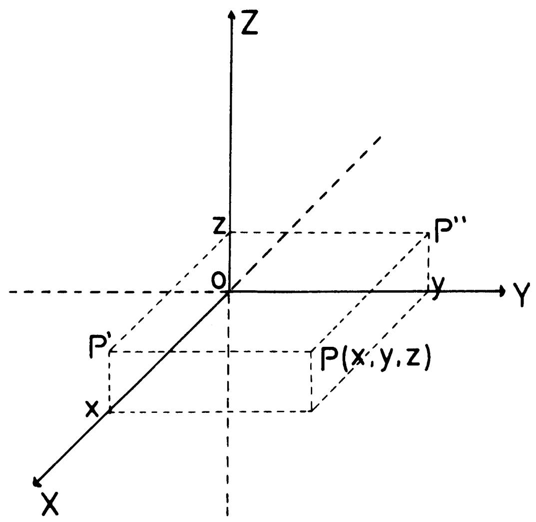


Sea O un punto cualquiera del espacio, tracemos por O, tres rectas perpendiculares entre si. Al punto O lo llamaremos origen y a las tres rectas, eje X, eje Y y eje Z respectivamente.

Eligiendo la misma unidad de medida sobre cada recta, establecemos una biyección entre cada recta y los números reales (capítulo 1).

Si P es un punto cualquiera del espacio, entonces lo podemos proyectar sobre cada eje de la siguiente forma: trazamos por P, paralelas al eje Y y al eje X; éstas cortan los planos ZX y ZY en los puntos P' y P'' respectivamente. Trazando por P' y P'' paralelas al eje Z, se cortarán los ejes X e Y en puntos cuyas abscisas denotaremos por x e y, respectivamente.

Finalmente si trazamos por P' una paralela al eje X, o si trazamos por P'' una paralela al eje Y, ambas cortarán al eje Z en un único punto cuya abscisa denotaremos por z.



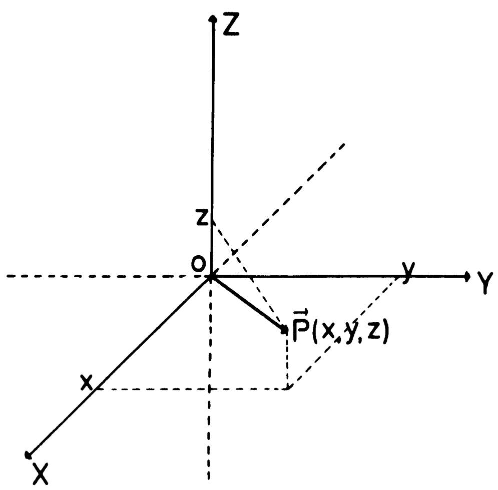
Los números x, y, z reciben el nombre de coordenadas cartesianas del punto P. Utilizaremos la notación $P(x, y, z)$ para indicar que los números x, y, z son las coordenadas del punto P del espacio.

Recíprocamente, cada triple de números reales (x, y, z) determina un único punto P, cuyas coordenadas son precisamente x, y, z.

De esta forma a cada triple de números reales (x, y, z) le asignamos un punto del espacio y sólo uno, y a cada punto P del espacio le asignamos un triple de números reales (x, y, z) y sólo uno.

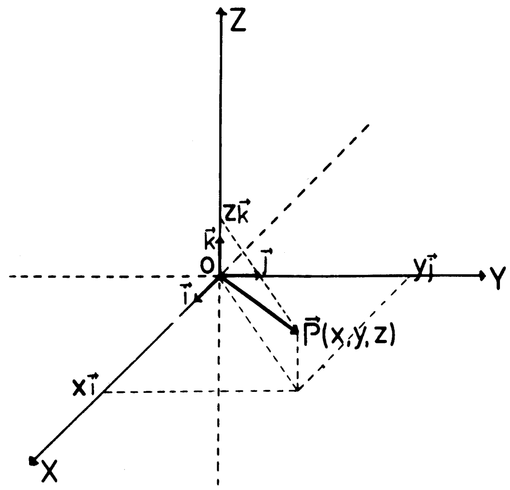
De manera análoga al caso del plano, los tres ejes X, Y, Z y la unidad de medida reciben el nombre de coordenadas cartesianas en el espacio.

Igualmente al caso del plano, podemos fijar la posición del punto P mediante un vector de origen O. De esta manera cada punto del espacio determina un vector de origen O, y el extremo de cada vector de origen O localiza un punto, el punto terminal del vector.

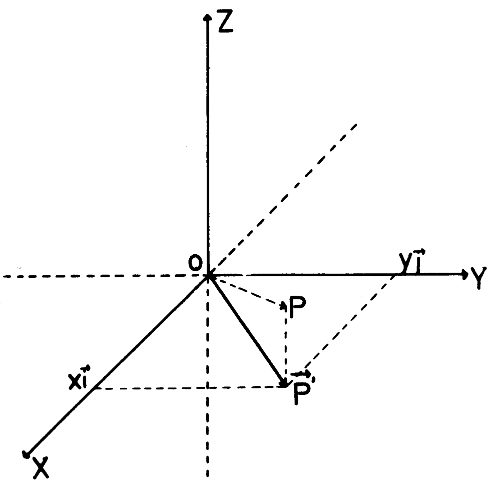


Cada vector que parte del origen del sistema de coordenadas se puede representar como suma de tres vectores en dirección de los ejes coordenados. Si **i, j, k** son los vectores de longitud uno sobre los ejes X, Y, Z respectivamente, y **OP** el vector que parte de O y termina en $P(x, y, z)$ entonces tendremos que **OP**$=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.

x, y, z son las *componentes* del vector **OP.**

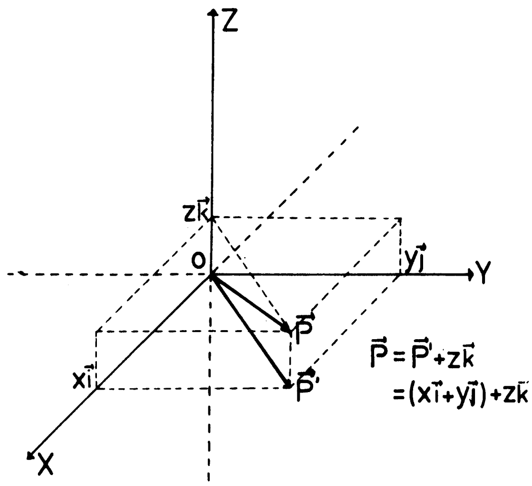


Observa que la proyección de **P** paralelamente al eje Z sobre el plano XY es el extremo de un vector **P**$'$, suma de $x\mathbf{i}$ y de $y\mathbf{j}$.

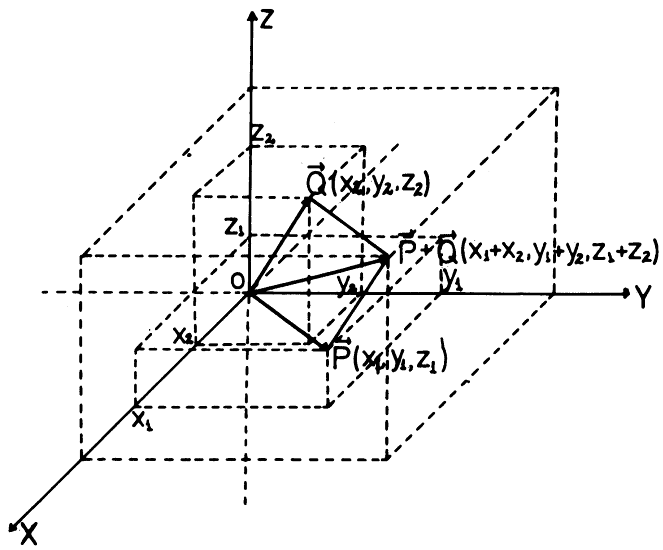


$\mathbf{P}' = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$

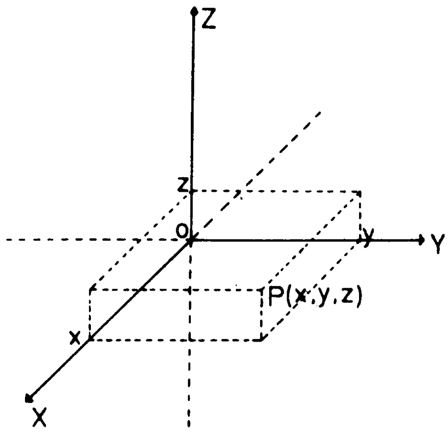
El vector **OP** se obtiene ahora como suma de **P**$'$ y de $z\mathbf{k}$**.** Es claro que el orden en que se ha hecho esta descomposición no influye en el resultado final.

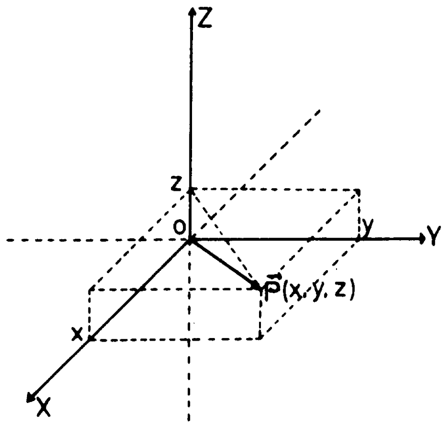


Observación. La ventaja que tiene el punto de vista vectorial es que a la suma de vectores corresponde la suma de las coordenadas. Así la correspondencia entre puntos del espacio y triplos de números conserva la suma, cuando se interpreta de esta manera.



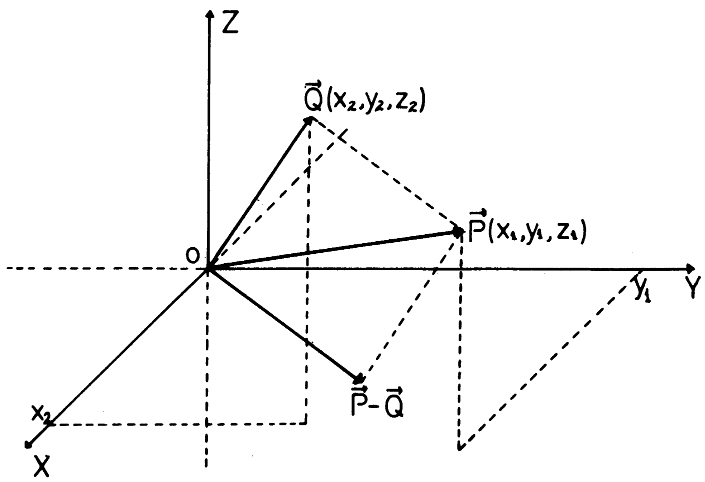
NOTACIÓN. De ahora en adelante denotaremos los puntos del espacio tanto por $P(x, y, z)$ como por el vector de posición **OP**, que escribiremos $\vec{\mathbf{P}}$, quedando sobreentendido que todos los vectores que consideramos tienen su origen en O.



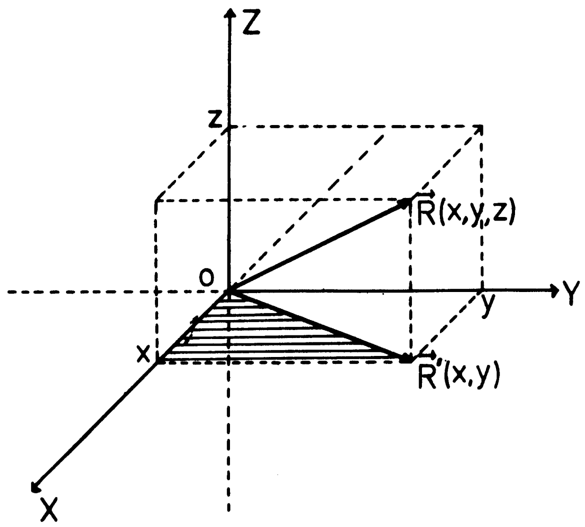


Veremos ahora como el lenguaje de las coordenadas se puede utilizar para describir la distancia entre dos puntos, ángulos entre vectores, subconjuntos del espacio, etc.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS. Queremos obtener la distancia entre dos puntos, dadas sus coordenadas. Sean $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ dos puntos arbitrarios del espacio. La distancia entre P y Q es igual a la longitud del vector $\vec{\mathbf{P}} - \vec{\mathbf{Q}}$ cuyas coordenadas son $(x_1 - x_2,\ \ y_1 - y_2,\ \ z_1 - z_2)$:



Dado un vector arbitrario $\vec{\mathbf{R}}(x, y, z)$ podemos hallar su longitud aplicando el teorema de Pitágoras dos veces.



Primero calculamos la longitud del vector $\vec{\mathbf{R}}'$. Por Pitágoras, es $\sqrt{x^2+y^2}$. Aplicando Pitágoras de nuevo al triángulo $OR'R$ obtenemos la longitud de $\vec{\mathbf{R}}(x, y, z)$:

$$\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

La distancia entre $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ es igual entonces a:

$$d(P, Q)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

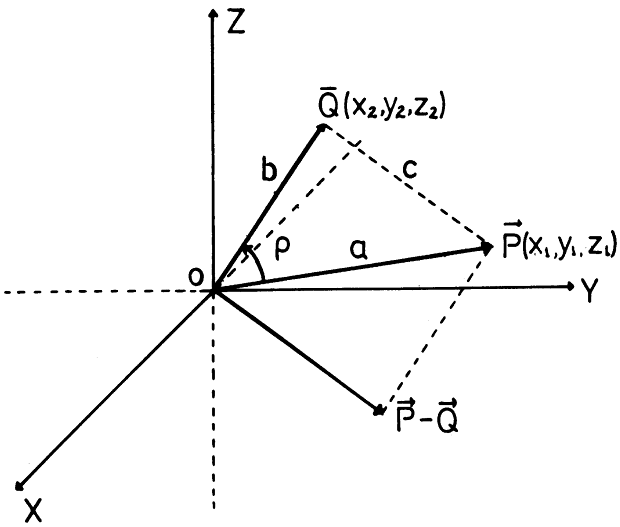
Ejemplo. La distancia del punto $P(0, 3, 0)$ al punto $Q(6, 0, 2)$ es:

$$d(P, Q)=\sqrt{(0-6)^2+(3-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{36+9+4}=\sqrt{49}=7.$$

ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES. Queremos hallar el ángulo entre dos vectores, conociendo sus componentes. El método es el mismo que usamos en el caso del plano.

Sea $\vec{\mathbf{P}}(x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{\mathbf{Q}}(x_2, y_2, z_2)$ dos vectores arbitrarios del espacio de longitudes

$a=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$ y $b=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$ respectivamente.



Por el teorema del coseno tenemos que: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\rho$, donde c es la longitud del vector $\vec{\mathbf{P}} - \vec{\mathbf{Q}}$, es decir:

$$c = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

despejando cos ρ de la ecuación de arriba tenemos:

$$\begin{aligned}
\cos\rho &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\
&= \frac{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]}{2\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}
\end{aligned}$$

Desarrollando los cuadrados y cancelando algunos términos obtenemos:

$$\cos\rho = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Conociendo el cos ρ, podemos calcular el ángulo ρ entre los dos vectores.

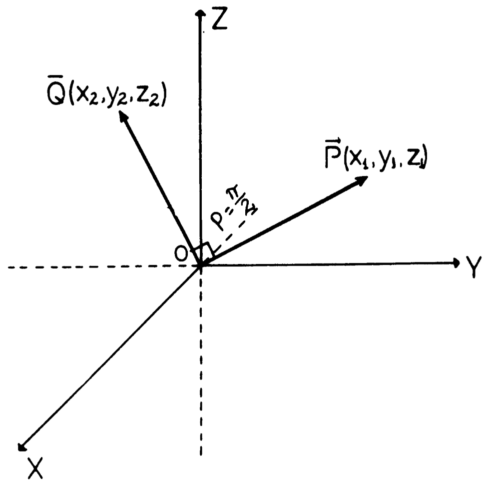
Observemos que lo que está en el denominador de la fórmula del $\cos\rho$ es el producto de las longitudes de los vectores en consideración. El denominador es no nulo, a menos que uno de los vectores fuese nulo, pero entonces no tiene sentido hablar de ángulo.

Ejemplo: Hallar el ángulo entre los vectores $\vec{\mathbf{P}}(4, -4, 7)$ y $\vec{\mathbf{Q}}(-6, -3, 2)$

$$\begin{aligned}
\cos\rho &= \frac{4\cdot(-6) + (-4)(-3) + 7\cdot 2}{\sqrt{16 + 16 + 49}\,\sqrt{36 + 9 + 4}} \\
&= \frac{-24 + 12 + 14}{\sqrt{81}\,\sqrt{49}} = \frac{2}{63}
\end{aligned}$$

De una tabla obtenemos $\rho \approx 88°$

PERPENDICULARIDAD DE VECTORES. ¿Cuándo dos vectores $\vec{\mathbf{P}}(x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{\mathbf{Q}}(x_2, y_2, z_2)$ no nulos son perpendiculares? Dos vectores cualesquiera serán perpendiculares sólo si el coseno del ángulo entre los dos es cero.



Luego, $\cos\rho = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{ab} = 0$, esto ocurre sólo si $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$. Por lo tanto, la condición para que los vectores $\vec{\mathbf{P}}(x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{\mathbf{Q}}(x_2, y_2, z_2)$ sean perpendiculares es:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Ejemplo. Los vectores $\vec{\mathbf{P}}(2, 3, 4)$ y $\vec{\mathbf{Q}}(1, 6, -5)$ son perpendiculares ya que

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 + 4(-5) = 2 + 18 - 20 = 0$$

Definición: La expresión $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ se llama el producto escalar de los dos vectores.

$$\vec{\mathbf{P}}(x_1, y_1, z_1) \text{ y } \vec{\mathbf{Q}}(x_2, y_2, z_2) \text{ y se escribe } \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$$

Así $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Obtenemos así la siguiente notación abreviada.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{P}| &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}} = \text{es la longitud de } \mathbf{P} \\
|\mathbf{Q}| &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = \sqrt{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}} = \text{es la longitud de } \mathbf{Q} \\
\cos\rho &= \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{|\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{Q}|} \quad : \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = |\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{Q}| \cos\rho
\end{aligned}$$

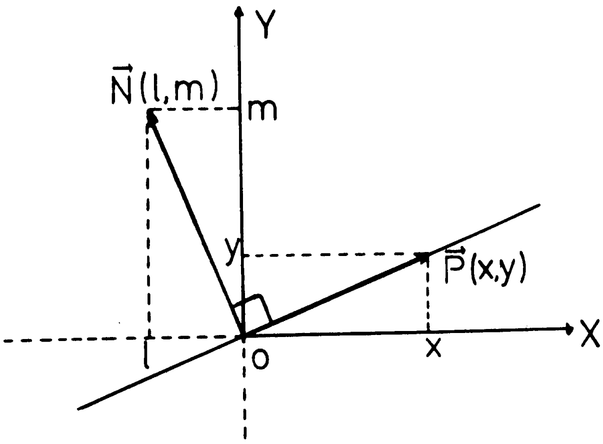
P y **Q** son perpendiculares si y solo si $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = 0$

SUBCONJUNTOS DEL ESPACIO

Hasta ahora hemos seguido paso a paso las mismas técnicas usadas en la guía capítulo 14 en el caso del plano.

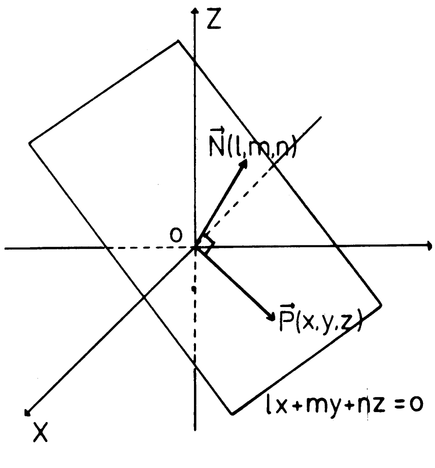
Utilizando coordenadas vamos a caracterizar ahora, subconjuntos del espacio tales como un plano, una recta en el espacio y una esfera. Hallaremos la ecuación de estos conjuntos, es decir, una relación entre las coordenadas x, y, z de los puntos del conjunto, de manera que sólo las coordenadas de sus puntos satisfagan la relación.

EL PLANO. Recordemos que para hallar la ecuación de la recta que pasa por O, expresábamos el hecho de que los vectores sobre esa recta eran perpendiculares a un vector fijo $\vec{\mathbf{N}}$, perpendicular a la recta.



Vamos a hacer lo mismo para hallar la ecuación de un plano que pasa por O.

Si $\vec{\mathbf{N}}(l, m, n)$ es un vector perpendicular al plano, cualquier punto que esté sobre el plano está señalado por un vector perpendicular a $\vec{\mathbf{N}}$. El punto $P(x, y, z)$ pertenece al plano sólo si $\vec{\mathbf{P}}(x, y, z)$ es perpendicular al vector $\vec{\mathbf{N}}(l, m, n)$: $\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = 0$

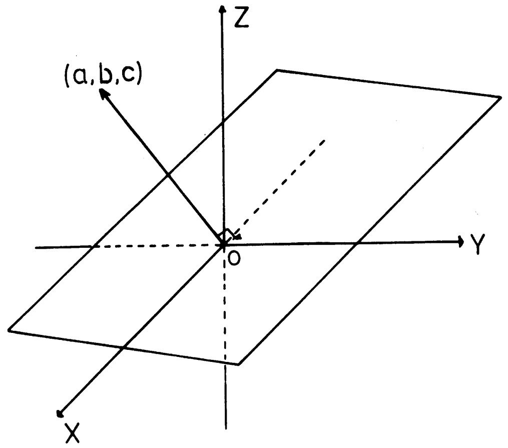


$$lx + my + nz = 0$$

Expresando este hecho analíticamente tenemos que si $P(x, y, z)$ es un punto genérico del plano, sus coordenadas satisfacen la ecuación $lx + my + nz = 0$ y únicamente los puntos del plano la satisfacen (recuerde la condición de perpendicularidad de vectores en el espacio).

Por lo tanto la ecuación de un plano que pase por el origen, perpendicular a $\vec{\mathbf{N}}(l, m, n)$, es $lx + my + nz = 0$.

Una ecuación lineal homogénea $ax + by + cz = 0$ representa la ecuación general de un plano por el origen. Precisamente el plano por O perpendicular al vector (a, b, c).

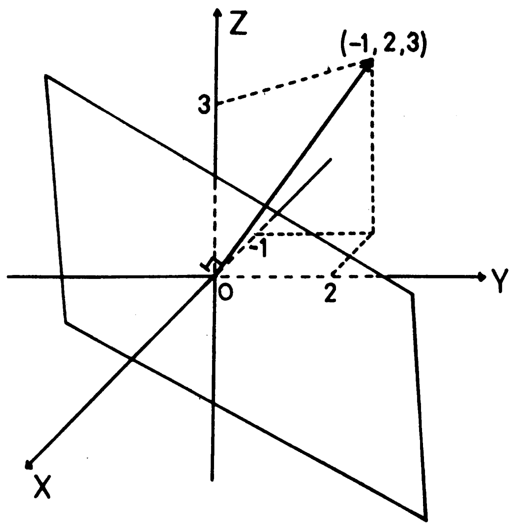


$ax + by + cz = 0$

Si $\vec{A}(abc)$ y $\vec{X}(xyz)$ entonces $\vec{A} \cdot \vec{X} = 0$

Veamos algunos ejemplos numéricos.

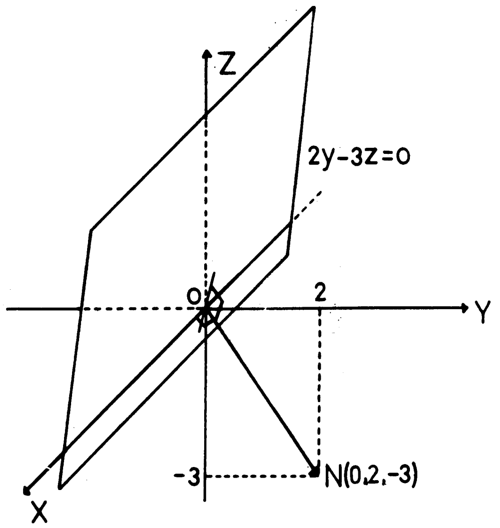
La ecuación $-x + 2y + 3z = 0$ representa un plano que pasa por O perpendicular al vector $(-1, 2, 3)$.



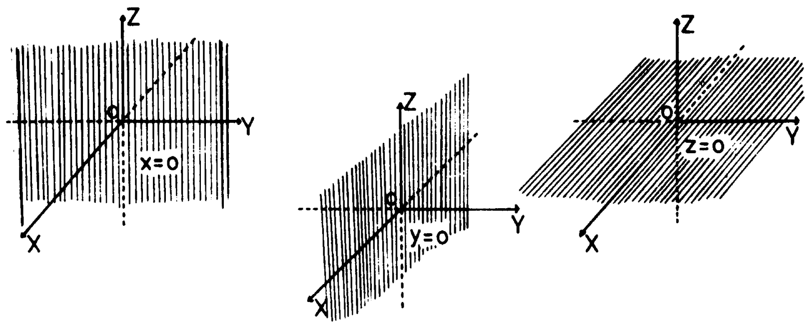
$-x + 2y + 3z = 0$

Si $\vec{A}(abc)$ y $\vec{X}(xyz)$ entonces $\vec{A} \cdot \vec{X} = 0$

La ecuación $2y - 3z = 0$ representa un plano que pasa por el origen perpendicular al vector $(0, 2, -3)$.



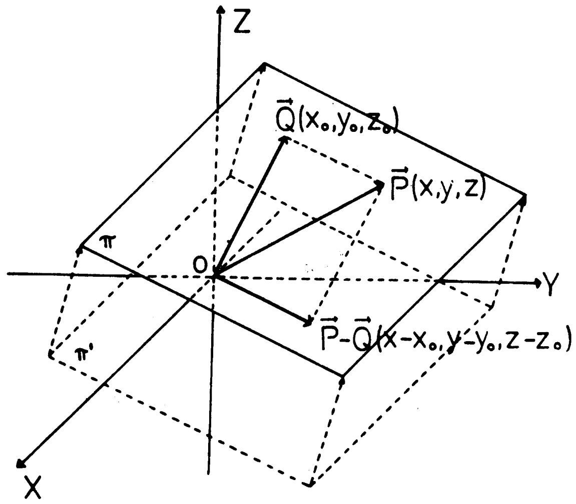
Observa que el hecho de que el coeficiente de x sea 0 en la ecuación del ejemplo anterior se traduce en que el plano contiene al eje X. Podemos ver, por ejemplo, que las ecuaciones $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, representan los planos YZ, XZ, XY, respectivamente.



Veamos ahora el caso general.

Consideremos un plano π que no pase por O y tratemos de determinar su ecuación.

Si $\vec{\mathbf{Q}}(x_0, y_0, z_0)$ es un punto fijo del plano, podemos obtener el plano π como el trasladado por el vector fijo $\vec{\mathbf{Q}}$, de un plano paralelo π' por el origen. Sea $lx + my + nz = 0$ la ecuación de π'.



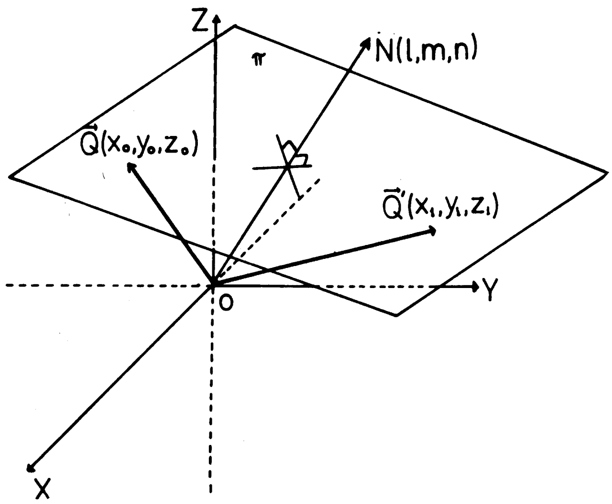
$\vec{\mathbf{P}}(x, y, z)$ es un punto del plano π sólo si la diferencia $\vec{\mathbf{P}} - \vec{\mathbf{Q}}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ está en π'. Expresando este hecho analíticamente obtenemos:

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0$$

que es entonces la ecuación del plano perpendicular a $\vec{\mathbf{N}}(l, m, n)$, y que pasa por $\vec{\mathbf{Q}}(x_0, y_0, z_0)$. Observa que si $\vec{\mathbf{Q}}(x_1, y_1, z_1)$ es otro punto sobre el mismo plano, entonces $l(x - x_1) + +m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0$ representa también el plano π.

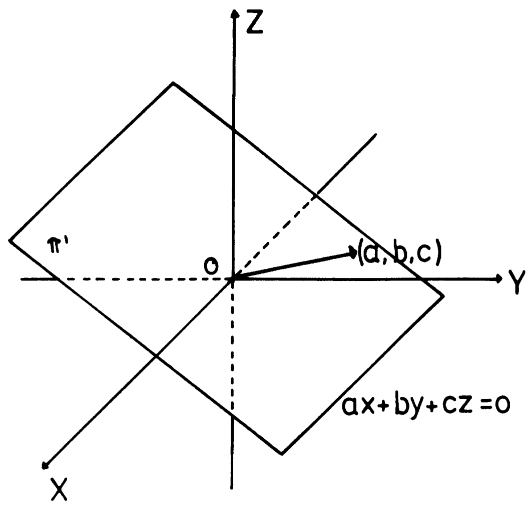
En notación vectorial: la ecuación del plano plano π se escribe $(\mathbf{X\text{-}Q}) \cdot \mathbf{N} = 0$

$Q(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ y $X(x, y, z)$ es un vector genérico.

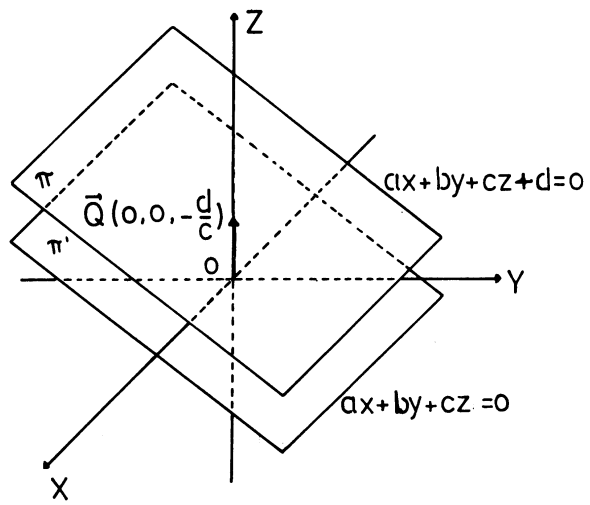


La ecuación $l(x - x_0) + m(y - y_0) + fl(z - z_0) = 0$ se puede llevar a una ecuación del tipo $ax + by + cz + d = 0$, simplemente colocando $a = l$, $b = m$, $c = n$ y $d = -(lx_0 + my_0 + nz_0)$. Es decir, la ecuación de un plano arbitrario que pasa por un punto Q, se puede expresar como una ecuación lineal en tres variables, $ax + by + cz + d = 0$.

Recíprocamente, una ecuación lineal en tres variables $ax + by + cz + d = 0$ representa la ecuación de un plano. Veamos: consideremos el plano π' correspondiente a la ecuación homogénea $ax + by + cz = 0$. Este plano pasa por O. y es perpendicular al vector $A(a, b, c)$

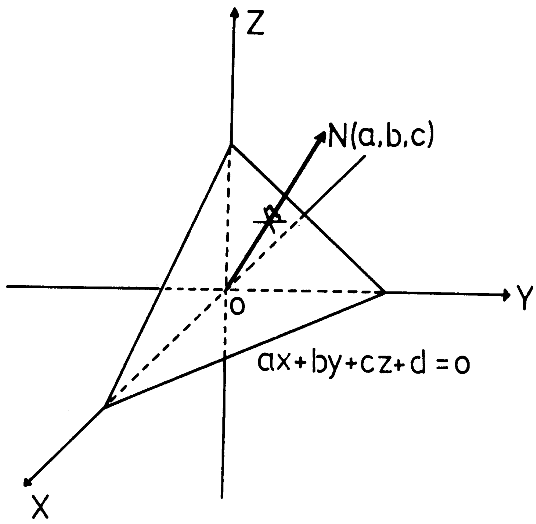


Si $c \neq 0$, el punto $Q\left(0, 0, -\dfrac{d}{c}\right)$, satisface la ecuación inicial $\left(a \cdot 0 + b \cdot 0 + c\left(-\dfrac{d}{c}\right) + d = 0\right)$. Luego la ecuación del plano paralelo a π' que pasa por $Q\left(0, 0, -\dfrac{d}{c}\right)$ es: $a(x-0) + b(y-0) + c\left(z + \dfrac{d}{c}\right) = 0$, es decir $ax + by + cz + d = 0$.



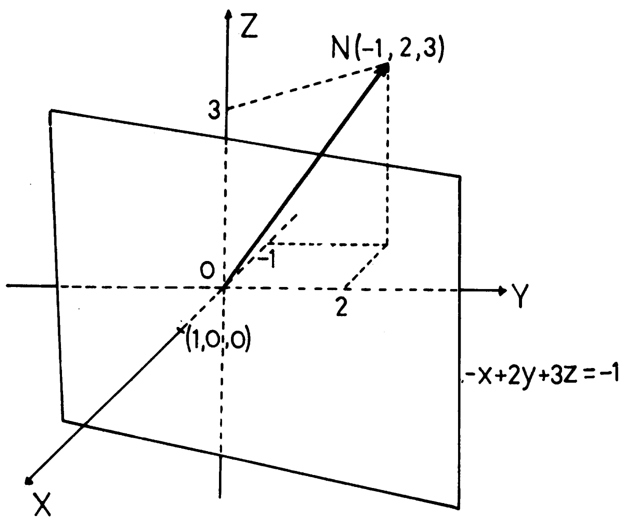
Obsérvese en realidad, que $ax + by + cz + d = 0$ representa la ecuación de un plano paralelo al plano $ax + by + +cz = 0$ y que pasa por un punto cualquiera $\mathbf{Q}(x_0, y_0, z_0)$ que satisfaga la ecuación. $ax + by + cz + d = 0$.

En resumen tenemos que toda ecuación lineal en tres variables $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano en el espacio que es perpendicular al vector (a, b, c).



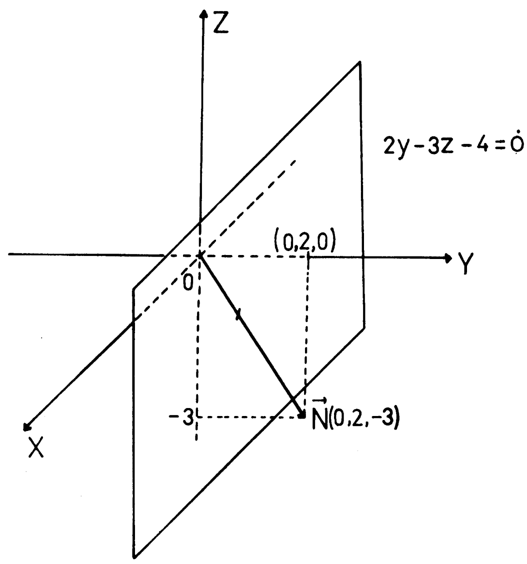
Ejemplos. Veamos ahora algunos ejemplos numéricos.

La ecuación $-x + 2y + 3z + 1 = 0$ representa un plano perpendicular al vector $(-1, 2, 3)$ y que pasa por el punto (1,0,0).



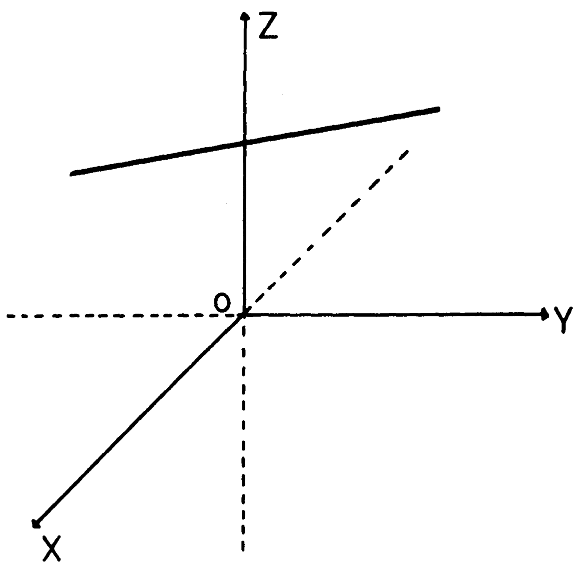
Fíjate en el ejemplo visto anteriormente de la ecuación homogénea $-x + 2y + 3z = 0$. Aquí el plano es paralelo al anterior, y pasa por el origen.

La ecuación $2y - 3z - 4 = 0$ representa un plano perpendicular al vector $(0, 2, -3)$, que pasa por el punto $(0, 2, 0)$.

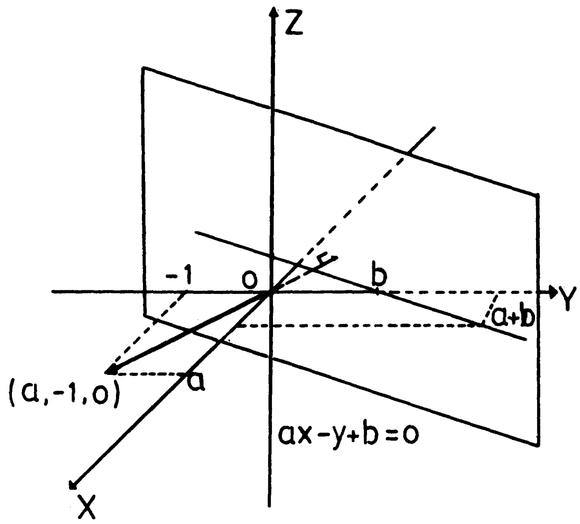


Compara este ejemplo con el caso de la ecuación homogénea $2y - 3z = 0$ visto antes. Allí el plano pasa por el origen y contiene al eje X. En nuestro ejemplo el plano no pasa por el origen pero es paralelo al eje X. Esto resulta al ser el coeficiente de x cero en la ecuación.

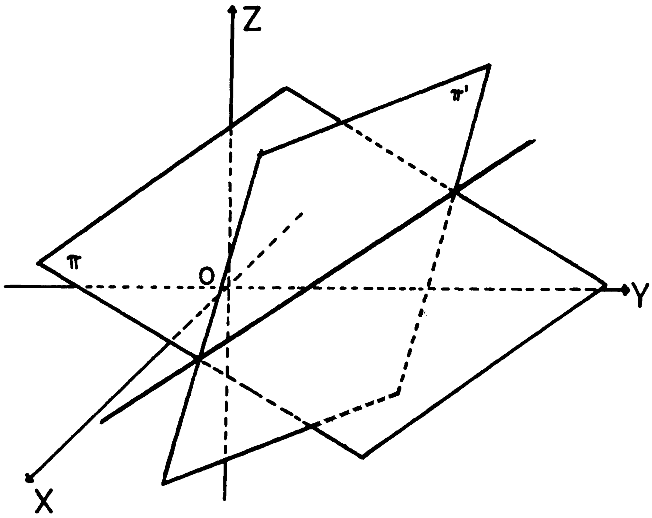
LA RECTA EN EL ESPACIO. ¿Qué ecuación representará una recta en el espacio?



La ecuación $y = ax + b$ ya no es la ecuación de una recta en el espacio. Si la escribimos de la forma $ax - y + b = 0$, vemos que representa un plano paralelo al eje Z. Más precisamente el plano perpendicular al vector $(a, -1, 0)$ y que pasa por $(0, b, 0)$.



¿Cómo caracterizamos entonces una recta en el espacio? Hay que recordar que una recta es siempre la intersección de dos planos. Esto implica que las coordenadas de sus puntos deben satisfacer simultáneamente las ecuaciones de estos dos planos.



Podemos caracterizar una recta por un par de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} ax + by + cz + d &= 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' &= 0 \end{aligned}$$

Es claro que estas dos ecuaciones no son únicas para una recta, puesto que hay muchos pares de planos que se cortan en esa recta.

Ejemplos:

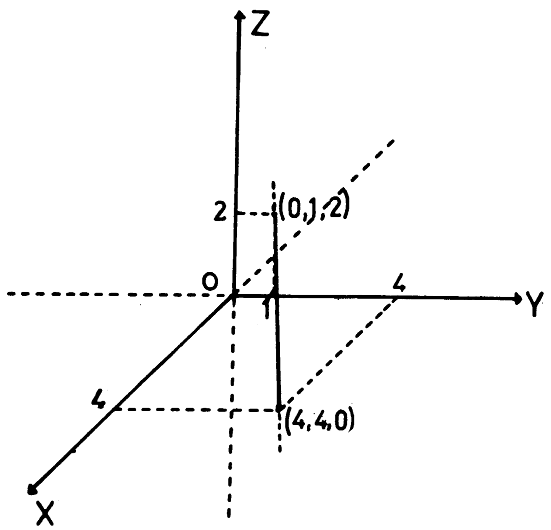
1. Representemos gráficamente la recta dada por

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 3z &= 4 \\ x - 2y - z &= -4 \end{aligned}$$

Hallemos dos puntos por donde pasa la recta. Encontramos por ejemplo el punto de corte con el plano XY haciendo $z = 0$:

$$\left. \begin{aligned} 3x - 2y = 4 \\ x - 2y = -4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 4, \ y = 4$$

Luego el punto de corte con el plano XY es $(4, 4, 0)$. Análogamente haciendo $x = 0$, hallamos el punto de corte con el plano YZ : $(0, 1, 2)$.



2. Hallar el punto de intersección de los planos representados por las siguientes ecuaciones: $x + 2y - z = 6$; $2x - y + 3z = -13$; $3x - 2y + 3z = -10$. El punto $P(x, y, z)$ buscado debe estar en los tres planos, por lo tanto debe satisfacer las tres ecuaciones. El problema se reduce a resolver el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

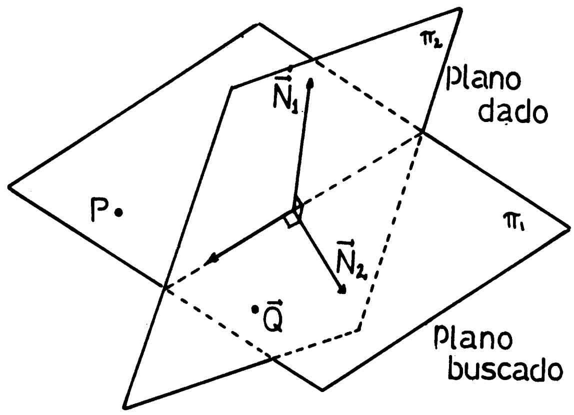
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 6 \\ 2x - y + 3z &= -13 \\ 3x - 2y + 3z &= -10 \end{aligned}$$

Resolviendo, obtenemos fácilmente que $x = -1$, $y = 2$, $z = -3$. Por lo tanto el punto de corte es $P(-1, 2, 3)$. ¿Qué significado geométrico tendría el hecho de que el sistema sea incompatible o tenga infinitas soluciones?

3. Supongamos ahora que queremos hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $P(1, -2,\ 2)$, $Q(-3, 1, -2)$ y es perpendicular al plano de ecuación $2x + y - z + 6 = 0$.

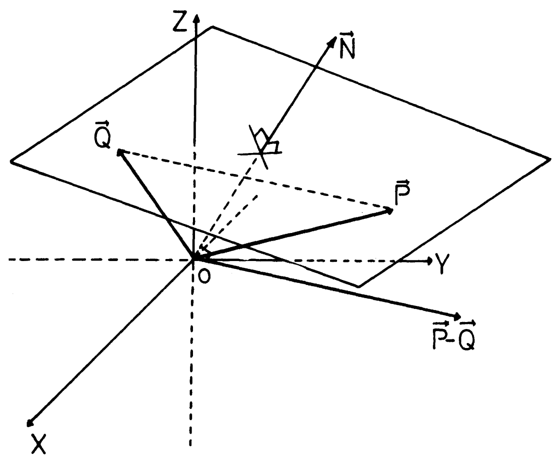
   El problema principal consiste en hallar un vector $\vec{\mathbf{N}}(l, m, n)$ perpendicular al plano buscado, ya que entonces la ecuación del plano sería $l(x-1) + m(y+2) + n(z-2) = 0$, porque debe pasar por $P(1, -2, 2)$.

   Observemos primero que si dos planos con vectores perpendiculares $\vec{\mathbf{N}}_1$ y $\vec{\mathbf{N}}_2$ respectivamente, son perpendiculares, entonces $\vec{\mathbf{N}}_1$ y $\vec{\mathbf{N}}_2$ son también perpendiculares.



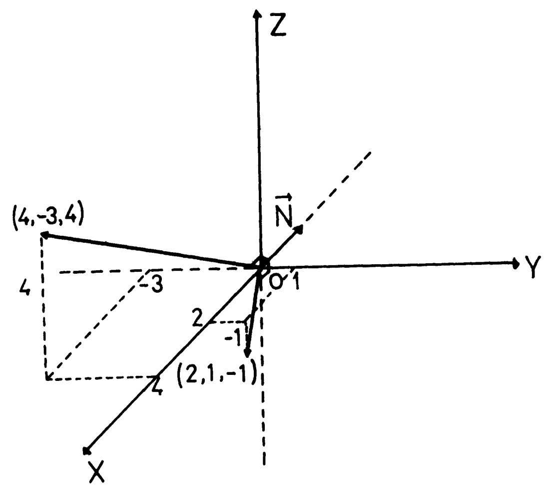
Por lo tanto el vector $\vec{\mathbf{N}}$ perpendicular al plano buscado debe ser perpendicular al vector $(2, 1, -1)$ ya que éste es perpendicular al plano $2x + y - z + 6 = 0$.

Por otra parte, si un plano con vector perpendicular $\vec{\mathbf{N}}$ pasa por dos puntos P y Q, el vector $\vec{\mathbf{P}} - \vec{\mathbf{Q}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{N}}$.



Por lo tanto el vector $\vec{\mathbf{N}}$ perpendicular al plano buscado debe ser perpendicular a $\vec{\mathbf{P}} - \vec{\mathbf{Q}}(4, -3, 4)$.
Tenemos entonces que $\vec{\mathbf{N}}$ debe ser perpendicular a $(2, 1, -1)$ y a $(4, -3, 4)$.

Observemos que un vector $\vec{\mathbf{N}}(l, m, n)$ perpendicular a $(2, 1, -1)$ y a $(4, -3, 4)$ tiene que tener componente no nula en dirección del eje $Z(n \neq 0)$ y que existen infinitos vectores perpendiculares a $(2, 1, -1)$ y a $(4, -3, 4)$ (los múltiplos de $\vec{\mathbf{N}}$).



Podemos tomar entonces a $\mathbf{N}$ como el vector $\mathbf{N}(l, m, 1)$ y aplicando la condición de perpendicularidad obtenemos:

$$\begin{aligned} 2l + 1m - 1 &= 0 \\ 4l - 3m + 4 &= 0 \end{aligned}$$

y resolviendo el sistema obtenemos $l = -\dfrac{1}{10}$; $m = \dfrac{6}{5}$. Entonces $\mathbf{N}\left(-\frac{1}{10}, \frac{6}{5}, 1\right)$ es perpendicular a nuestro plano. También lo es $10 \cdot \mathbf{N} = (-1, 12, 10)$, y obtenemos que

$$-1(x-1) + 12(y+2) + 10(z-2) = -0 \text{ ó } -x + 12y + 10z + 5 = 0$$

es la ecuación del plano que pasa por $P(1, -2, 2)$, $Q(-3, 1, -2)$ y que es perpendicular a $2x + y - z + 6 = 0$.

PRODUCTO VECTORIAL

Al resolver problemas sobre planos y rectas en el espacio, es frecuentemente necesario encontrar un vector perpendicular a otros dos vectores $\mathbf{A}(a, b, c)$ y $\mathbf{N}(l, m, n)$ una idea muy útil para esto es el producto vectorial de los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{N}$. Se denota $\mathbf{A} \times \mathbf{N}$ y se define así: $\mathbf{A} \times \mathbf{N}$ y se define así:

$$A \times N = (bn - mc)\vec{\mathbf{i}} + (cl - an)\vec{\mathbf{j}} + (am - bl)\vec{\mathbf{k}}$$

Una manera de recordar esta definición es escribirla (simbólicamente) como una determinante

$$A \times N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ l & m & n \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} b & c \\ m & n \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a & c \\ l & n \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a & b \\ l & m \end{vmatrix} = (bn - cm)\mathbf{i} - (an - cl)\mathbf{j} + (am - bl)\mathbf{k}$$

El producto vectorial es entonces otro vector. Queremos probar que $A \times N$ es perpendicular a $\vec{A}$ y a $\vec{N}$. Sabemos que un vector $X(x, y, z)$ es perpendicular a $A(a, b, c)$ si y solo si

$$X \cdot A = xa + by + cz = 0$$

Si escribimos las expresiones vectoriales de A y X

$$A = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \quad \text{y} \quad X = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

El producto escalar $X \cdot A$ se obtiene sustituyendo $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ en la expresión de un vector por las coordenadas del otro vector.

$$\text{Entonces} \quad (A \times N) \cdot X = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ l & m & n \end{vmatrix}$$

Ahora resulta obvio que $(A \times N) \cdot A = 0$ y $(A \times N) \cdot N = 0$ poque en cada caso se obtiene un determinante con dos filas iguales.

Regresemos al problema 3 anterior: queremos hallar la ecuación de un plano π que pasa por $P(1, -2, 2)$ y $Q(-3, 1, -2)$. y sea perpendicular al plano de ecuación $2x + y - z + 6 = 0$.

Vimos que el problema se reduce a hallar un vector que sea perpendicular a $(2, 1, -1)$ y a $\vec{P} - \vec{Q}(4, -3, 4)$. Este es el producto vectorial.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 10\mathbf{i}$$

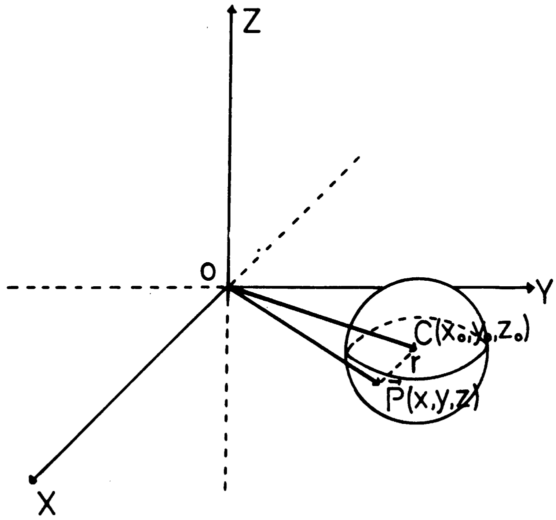
El plano perpendicular a este vector es π' paralelo a π por el origen, su ecuación es

$$x - 12y - 10z = 0$$

Trasladándolo a $P(1, -2, 2)$ obtenemos $x - 1 - 12(y + 2) - 10(z - 2) = 0$ o se tiene

$$x - 12y - 10z - 5 = 0.$$

ECUACION DE LA ESFERA.



Recordemos que una esfera es el conjunto de puntos del espacio que son equidistantes de un punto fijo llamado centro. Expresemos entonces analíticamente el hecho de que si $P(x, y, z)$ está sobre la esfera entonces la distancia de P a su centro $C(x_0, y_0, z_0)$ es una constante igual al radio de la esfera

$$d(P, C) = r$$

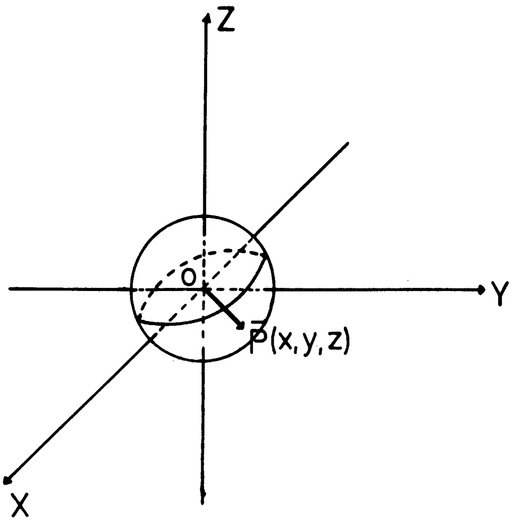
recordando la expresión de distancia, tenemos:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r$$

elevando al cuadrado: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.

Esta es la ecuación de la esfera con centro (x_0, y_0, z_0) y radio r.

Si el centro es el origen, la ecuación se escribe simplemente así: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.



EJERCICIOS

1. Dados los puntos $A(-11, 8, 4), B(-1, -7, -1)$ y $C(9, -2, 4)$, demostrar que las rectas AB y BC son perpendiculares. Ayuda: pruebe que $(A - B) \cdot (C - B) = 0$
2. Hallar el ángulo θ formado por las rectas AB y CD siendo $A(-3, 2, 4), B(2, 5, -2), C(1, -2, 2)$ y $D(4, 2, 3)$.
3. Hallar la ecuación del conjunto de puntos cuya suma de distancias a los dos puntos fijos $(0, 3, 0)$ y $(0, -3, 0)$ sea igual a 10. (Elipsoide de revolución)
4. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, 1, -1), B(-2, -2, 2)$ y $C(1, -1, 2)$. Ayuda: Un vector perpendicular a ese plano es $(A - B) \times (C - B)$
5. Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto $(1, -1, 3)$ y es paralelo al plano $3x + y + z = 7$.
6. Encontrar la ecuación del plano por los puntos $P_1(1, 2, 3)$; $P_2(3, 2, 1)$ y perpendicular al plano $4x - y + 2z = 7$.
7. Encontrar la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(1, 0, -1)$ y $P_2(-1, 2, 1)$ y es paralelo a la recta intersección de los planos
$$\begin{aligned} 3x + y - 2z &= 6 \\ 4x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$$
8. Encontrar el centro y radio de la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4z = 0$.
9. Hallar la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $(1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)$ y $(2, 1, 1)$.
10. Hallar la ecuación de la esfera de centro $(2, -2, 3)$ y que pasa por el punto $(7, -3, 5)$.
11. Demuestre que
    a) $A \cdot (B + C) = AB + AC$
    b) $A \cdot B = B \cdot A$
    c) $(B + C) \cdot A = BA + CA$
12. Demuestre que
    a) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
    b) $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$
    c) $A \times B = -B \times A$

AUTOEVALUACIÓN

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA-1511—Autoevaluación de los capítulos 11 al 15—

Sus respuestas las puede verificar en el Apéndice, en la página 344.

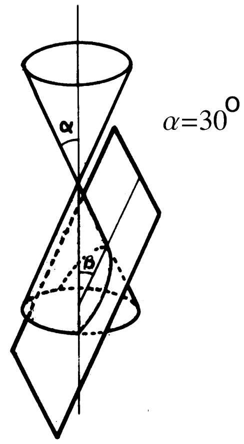
1. Las áreas de dos conos semejantes son 18cm^2 y 50cm^2 respectivamente. Si el volumen del cono mayor es 250cm^3, cuál es el volumen de cono menor.

A	104cm^3
B	84cm^3
C	74cm^3
D	64cm^3
E	54cm^3
F	¡Ninguna!

2. Un cono recto tiene altura 8cm y el diámetro de su base mide 12cm. Si el área lateral A del cono se mide en cm^2, entonces A está en el intervalo:

A	$[30\pi; 40\pi)$
B	$[40\pi; 50\pi)$
C	$[50\pi; 60\pi)$
D	$[60\pi; 70\pi)$
E	$[70\pi; 80\pi)$
F	¡Ninguna!

3. Considere un cono con un ángulo $\alpha = 30°$ ¿Que valor debe tener el ángulo β, que forma un plano Π con el eje del cono, para que la sección sea una parábola?



A	$\beta = 30°$	B	$0 < \beta < 30°$	C	$30° < \beta < 45°$	D	$45° < \beta < 90°$
E	$\beta = 0$	F	¡Ninguna!				

4. Una elipse tiene semieje mayor que mide 30cm y su semieje menor mide 20cm. Entonces el área A de la elipse (medida en cm^2) está en el intervalo

A	[1700;1800)	B	[1800;1900)	C	[1900;2000)	D	[2000;2001)
E	[2001;2002)	F	¡Ninguna!				

5. Un plano corta un cono de vértice V según una elipse. Si A y A' son los extremos del diámetro mayor de la elipse y si $\overline{VA'} = 4$, $\overline{VA} = 2$ y la excentricidad de la elipse es $E = 1/2$, calcule la distancia de A a la directriz más cercana.

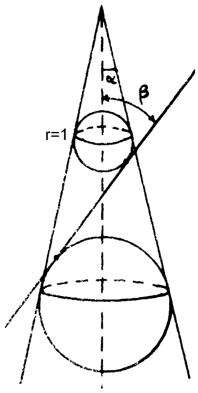
A	2	B	3	C	4	D	5	E	6	F	¡Ninguna!

6. Sea un cono de ángulo $\alpha = 30°$. Un plano (P) corta este cono de manera que:

   a) el ángulo $\beta = 60°$.

   b) la esfera de Dandelín de "arriba" tiene un radio $r = 1$.

   Entonces el radio de la otra esfera de Dandelín está en el intervalo



A [1,0;1,75)	B [1,25;2,25)	C [2,25;3,0)	D [3,0;3,75)	E [3,75;4,5)
F ¡Ninguna!				

7. Sabiendo que el punto $P(3,4)$ divide al segmento que determinan los puntos $P_1(1,3)$ y $P_2(x_2,y_2)$ en la relación $r = \frac{\overline{PP_1}}{\overline{PP_2}} = \frac{1}{3}$. Determine las coordenadas del punto $P_2(x_2,y_2)$.

A $P_2(-1,2)$	B $P_2(3,4)$	C $P_2(7,6)$	D $P_2(9,7)$	E $P_2(11,8)$
F ¡Ninguna!				

8. Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ en el punto $P(-2,-7)$.

A $2x + 10y + 34 = 0$	B $x + 5y + 34 = 0$	C $2x + 10y + 74 = 0$
D $x + 5y + 36 = 0$	E $x + 10y + 72 = 0$	F ¡Ninguna!

9. Considere los puntos $A(-3,2,4)$, $B(2,5,-2)$, $C(1,-2,2)$, $D(4,2,3)$. La medida en grados del ángulo agudo θ formado por las rectas AB y CD está en el intervalo:

A $[25;35)$	B $[35;45)$	C $[45;55)$	D $[55;65)$	E $[65;75)$
F ¡Ninguna!				

10. Las coordenadas (x_0, y_0, z_0) del centro C de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4z = 0$ son:

A $C(-2,2,2)$	B $C(-2,0,2)$	C $C(2,-2,0)$	D $C(2,0,-2)$
E $C(0,2,-2)$	F ¡Ninguna!		

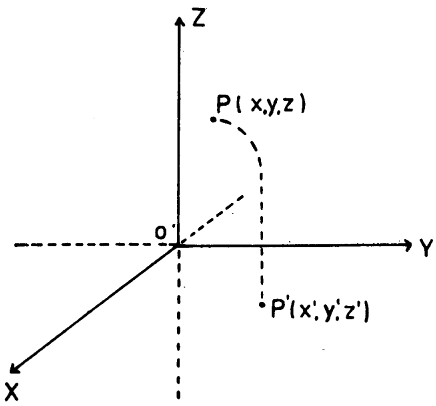
CAPíTULO 16

TRANSFORMACIONES EN COORDENADAS

En esta guía vamos a ver cómo se pueden expresar transformaciones del espacio o del plano, como las traslaciones, rotaciones y homotecias, en términos de coordenadas.

Dados una transformación y un sistema de coordenadas queremos obtener las coordenadas de la imagen de un punto P, conociendo las coordenadas de P.

En el caso de una transformación en el espacio, queremos expresar las coordenadas x', y', z' de la imagen P' de P, en función de las coordenadas x, y, z de P. En otras palabras, buscamos fórmulas donde intervengan las coordenadas x, y, z de P para representar las coordenadas x', y', z' de P'.



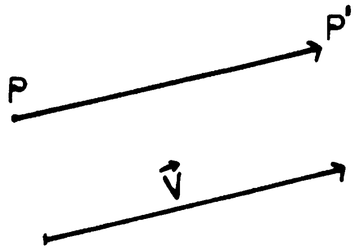
$$
\begin{aligned}
x' &= f_1(x, y, z)\\
y' &= f_2(x, y, z)\\
z' &= f_3(x, y, z)
\end{aligned}
$$

Ejemplos.

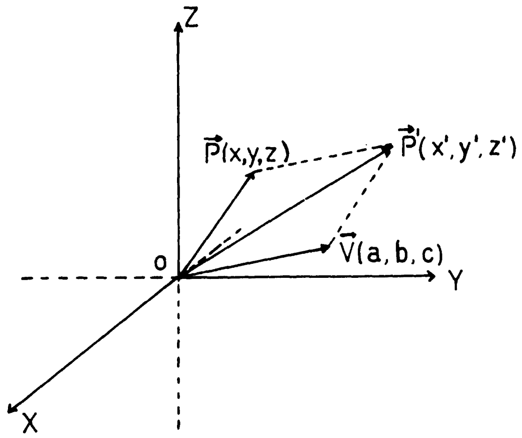
1. LA TRASLACION.

   a) *Fórmulas de transformación de coordenadas.*

   Recordemos que una traslación, definida por un vector fijo $\mathbf{V}$, transforma cada punto P del espacio en un punto P', obtenido llevando el vector $\mathbf{V}$ a partir de P.



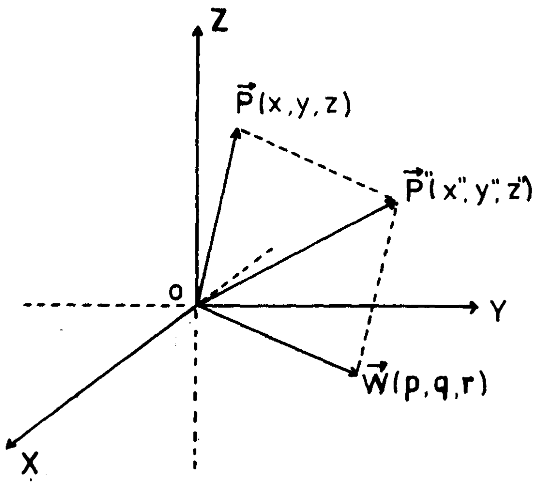
Fijemos un sistema de coordenadas y tratemos de obtener las coordenadas x', y', z' de la imagen P', de un punto $P(x, y, z)$ arbitrario.
Comencemos por dibujar el vector **V** en el origen y supongamos que sus coordenadas son a, b, c respectivamente.



Obsérvese que **P′** se obtiene sumando **V** a **P**: $\mathbf{P}'(x', y', z') = \mathbf{P}(x, y, z) + \mathbf{V}(a, b, c)$. Luego las coordenadas de **P′** no son más que la suma de las. coordenadas de **P** y las de **V**:

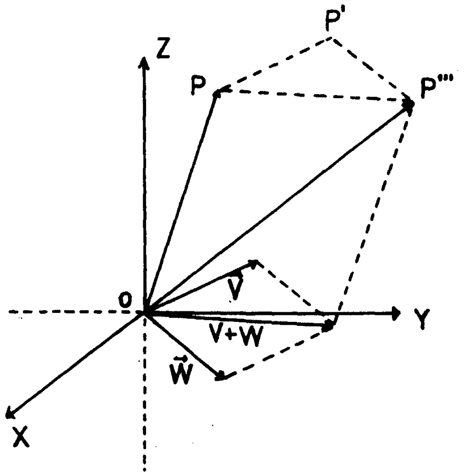
$$\begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= y + b \\ z' &= z + c \end{aligned}$$

Como vemos, estas fórmulas nos dan las coordenadas de la imagen de P, conociendo las coordenadas del punto P y las coordenadas del vector de traslación **V**.
Supongamos que tenemos otra traslación definida por el vector $\mathbf{W}(p, q, r)$. Las coordenadas x'', y'', z'' de la imagen P'' de un punto $P(x, y, z)$, se obtienen ahora sumando las de **P** con las de **W**:



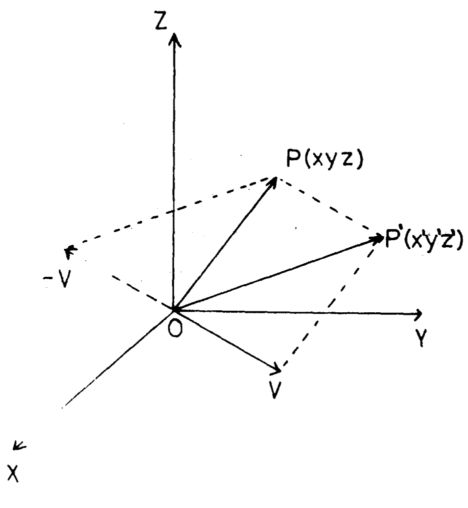
$$\begin{aligned} x'' &= x + p \\ y'' &= y + q \\ z'' &= z + r \end{aligned}$$

Si trasladamos ahora a P, según el vector $\mathbf{V}(a, b, c)$, y luego hacemos la traslación según el vector $\mathbf{W}(p, q, r)$ obtenemos la traslación producto de P según el vector $\mathbf{V}+$ $\mathbf{W}(a+p, b+q, c+r)$. Luego las coordenadas x''', y''', z''' de la imagen P''' de P se obtienen sumando las de P con las de $\mathbf{V}+\mathbf{W}$.



$$\begin{aligned} x''' &= x+a+p \\ y''' &= y+b+q \\ z''' &= z+c+r \end{aligned}$$

Si se tiene la traslación definida por el vector $\mathbf{V}(a, b, c)$ que manda el punto P en P', la aplicación inversa, la que "devuelve" P' a P es otra traslación definida por el vector -$\mathbf{V}(-a, -b, -c)$. Observe que las coordenadas de la imagen del punto $P'(x', y', z')$, según la traslación por **-V** son:



$$\begin{aligned} x &= x'-a \\ y &= y'-b \\ z &= z'-c \end{aligned}$$

b) *Las traslaciones forman un grupo de transformaciones.*

El hecho de ser el producto de dos traslaciones otra traslación, y que la inversa de una traslación es otra traslación, nos dice que las traslaciones forman un grupo de transformaciones.

Este hecho lo podríamos haber demostrado directamente a partir de las fórmulas que nos dan las coordenadas x', y', z' de la imagen del punto $P(x, y, z)$, según una traslación por el vector $\mathbf{V}(a, b, c)$:

$$\begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= y + b \\ z' &= z + c \end{aligned}$$

Veamos ésto: si trasladamos $P(x, y, z)$ según $\mathbf{V}(a, b, c)$ obtenemos $P'(x',\ y',\ z')$ donde $x' = x + a,\ \ y' = y + b,\ \ z' = z + c$. Si ahora trasladamos $P'(x', y', z')$ según $\mathbf{W}(p, q, r)$ obtenemos $P'''(x''',\ y''',\ z''')$ donde $x''' = x' + p,\ y''' = y' + q,\ z''' = z' + r$. Pero según las fórmulas de x', y', z' obtenemos entonces que

$$x''' = x + a + p,\ \ y''' = y + b + q,\ \ z''' = z + c + r$$

Estas fórmulas dicen que $P'''(x''', y''', z''')$ es la imagen de $P(x, y, z)$ según la traslación **V**+**W**$(a + p,\ b + q,\ c + r)$; hemos demostrado que el producto de dos traslaciones es otra traslación.

Supongamos ahora que hemos trasladado $P(x, y, z)$ según $\mathbf{V}(a, b, c)$ obteniendo el punto $P'(x', y', z')$ y queremos trasladar P', según algún vector (p, q, r) a determinar, para obtener de vuelta a $P(x, y, z)$.

En coordenadas, tendríamos que debe cumplirse lo siguiente:

$$\begin{array}{lclcl} x' + p = x & & (x + a) + p = x & & p = -a \\ y' + q = y & \Rightarrow & (y + b) + q = y & \Rightarrow & q = -b \\ z' + r = z & & (z + c) + r = z & & r = -c \end{array}$$

Por lo tanto el vector (p, q, r) debe ser $(-a, -b, -c) = -\mathbf{V}$, y el vector que define la transformación inversa es $-\mathbf{V}$.

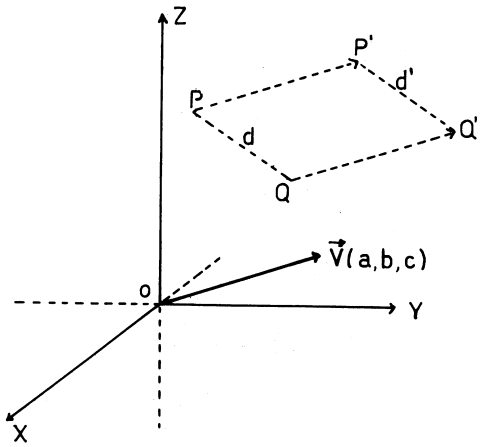
c) *Las traslaciones son movimientos rígidos.*

Veamos analíticamente el hecho de que la traslación es un movimiento rígido, es decir que conserva las distancias.

Sean $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ dos puntos arbitrarios del espacio y sean

$P'(x_1', y_1', z_1')$ y $Q'(x_2', y_2', z_2')$ los trasladados de P y Q respectivamente según un vector $\mathbf{V}(a, b, c)$.

Queremos demostrar que $d(P', Q') = d(P, Q)$.



$$\begin{array}{lrcl} \text{pero como} & d(P',Q') & = & \sqrt{(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2+(z_1'-z_2')^2} \\ \text{se tendrá} & x_1' & = & x_1+a \qquad x_2' = x_2+a \\ & y_1' & = & y_1+b \qquad y_2' = y_2+b \\ & z_1' & = & z_1+c \qquad z_2' = z_2+c \end{array}$$

$$\begin{aligned} d(P',Q') &= \sqrt{[(x_1+a)-(x_2+a)]^2+[(y_1+b)-(y_2+b)]^2+[(z_1+c)-(z_2+c)]^2} \\ &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} = d(P,Q) \end{aligned}$$

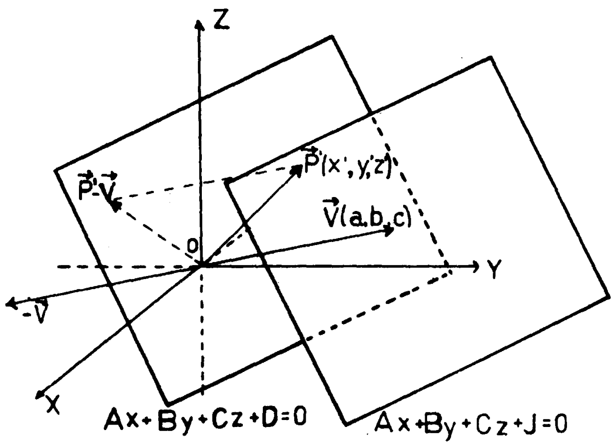
Hemos demostrado entonces usando coordenadas, que la traslación es un movimiento rígido.

d) *Ecuación de la imagen de un plano, recta, esfera, etc.*

Veamos ahora cómo se puede interpretar analíticamente el hecho de que el traslado de un plano es un plano, de una recta otra recta, de una esfera otra esfera, etc.

La ecuación de un plano es una ecuación lineal del tipo $Ax + By + Cz + D = 0$.

Traslademos un plano arbitrario de ecuación $Ax+By+Cz+D = 0$ según el vector $\mathbf{V}(a, b, c)$.



Tenemos que $P'(x', y', z')$ está en la imagen del plano sólo si $P' - V$ está en el plano, es decir, satisface su ecuación:

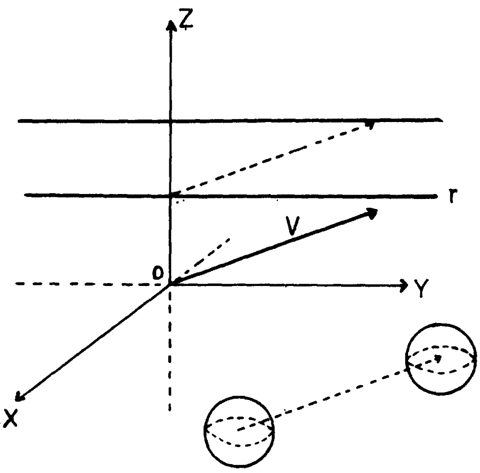
$$A(x' - a) + B(y' - b) + C(z' - c) + D = 0, \quad \text{ó}$$

$$Ax' + By' + Cz' + J = 0, \quad \text{donde:} \quad J = -(Aa + Bb + Cc)$$

Esta ecuación es lineal en x', y', z' y representa un plano paralelo al dado. Observa que todo punto que satisfaga esta última ecuación está en la imagen del primer plano, luego el traslado de nuestro plano, es otro plano. Más precisamente el plano representado por:

$$Ax + By + Cz + J = 0 \quad \text{con} \quad J = -(Aa + Bb + Cc).$$

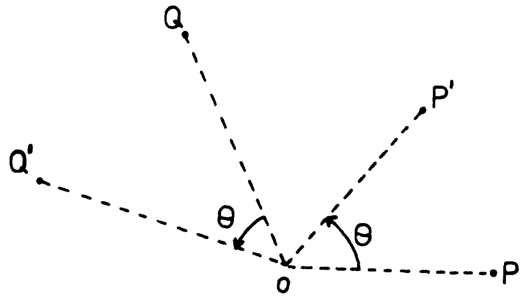
Observación. No hay necesidad de poner primas en la ecuación, ya que x, y, z representan las coordenadas de un punto genérico del espacio.
Siguiendo de manera similar al caso de la traslación de un plano, se puede demostrar que la trasladada de una recta es otra recta, la de una esfera, otra esfera, etc. Basta escribir la ecuación correspondiente y observar que la ecuación de la imagen es del mismo tipo.



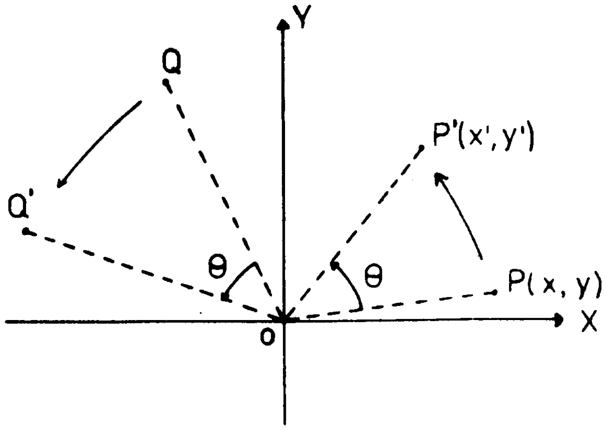
2. LA ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN PUNTO FIJO EN EL PLANO.

   a) *Fórmulas de transformación de coordenadas para la rotación.*

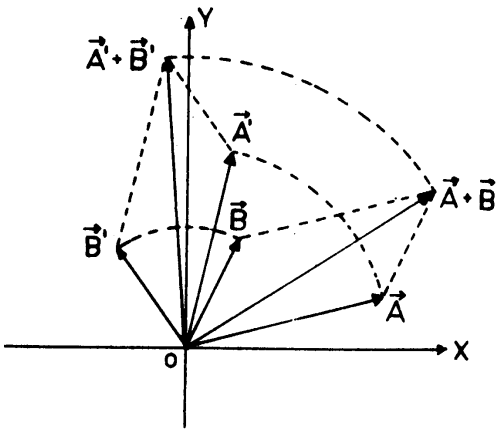
   Recordemos que una rotación, alrededor de un punto fijo O del plano, transforma cada punto P del plano en otro punto P', dado por un ángulo fijo. El punto O se transforma en sí mismo.



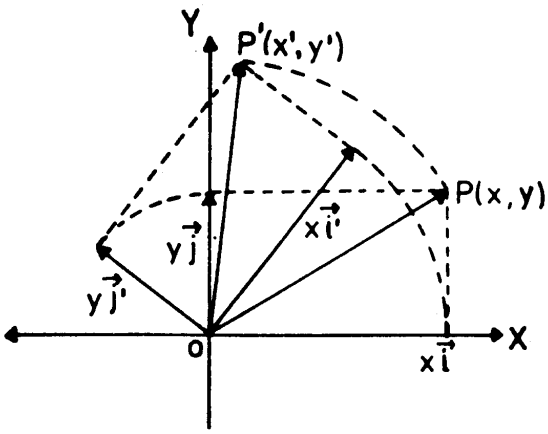
Queremos hallar las coordenadas del punto P' conociendo las de P. Para estudiar este caso, podemos simplificar mucho las fórmulas si escogemos los ejes de coordenadas de manera que el origen coincida con el centro de rotación.



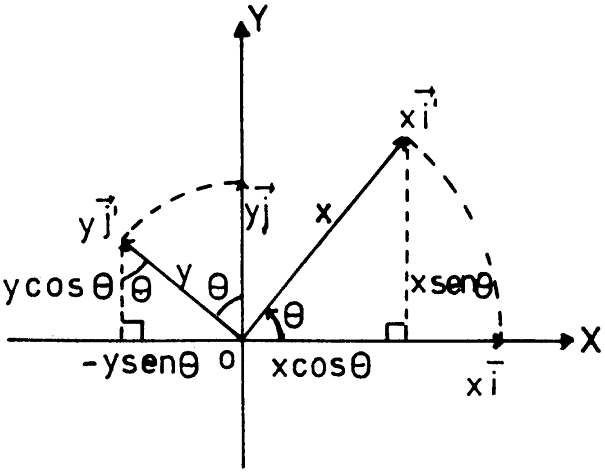
Queremos hallar una fórmula que nos dé las coordenadas x', y' si conocemos x e y, y el ángulo de rotación θ. Observemos primeramente que la rotación conserva la suma de vectores: si $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{B}'$ son las imágenes de A y B respectivamente, por la rotación, entonces $\mathbf{A}'+\mathbf{B}'$ es la imagen de $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.



En particular como $\mathbf{P}(x, y) = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$, se tendrá que la imagen $\mathbf{P}'$ de $\mathbf{P}$, es igual a la suma de las imágenes de $x\mathbf{i}$ e $y\mathbf{j}$ respectivamente: $\mathbf{P}' = x\mathbf{i}' + y\mathbf{j}'$.



El problema se reduce a hallar las coordenadas de los vectores $x\mathbf{i}'$ e $y\mathbf{j}'$.



Para esto fíjate en el triángulo de la derecha. Como el vector $x\mathbf{i}$ tiene longitud x, también la tendrá el vector $x\mathbf{i}'$; luego la hipotenusa del triángulo tiene longitud x y las coordenadas del vector $x\mathbf{i}'$ son $(x\cos\theta; x\operatorname{sen}\theta)$.

En el triángulo de la izquierda, la hipotenusa tiene longitud y, luego las coordenadas del vector $y\mathbf{j}'$ son $(-y\operatorname{sen}\theta, y\cos\theta)$:

$$\begin{aligned} x\mathbf{i}' &= (x\cos\theta, x\operatorname{sen}\theta) \\ y\mathbf{j}' &= (-y\operatorname{sen}\theta, y\cos\theta) \end{aligned}$$

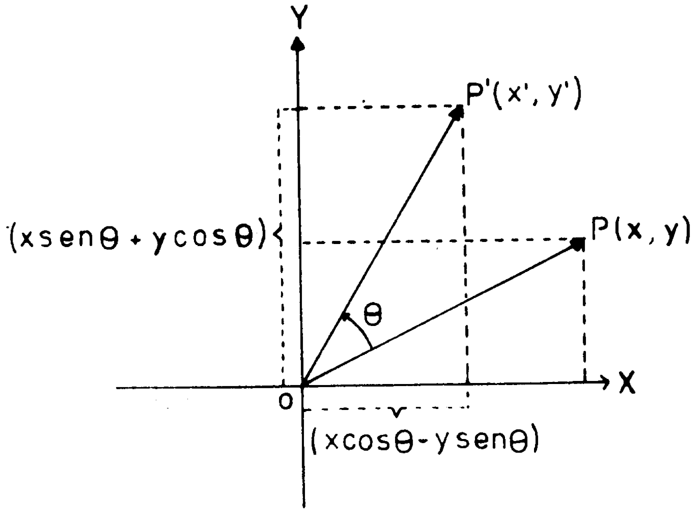
La imagen P' de P es la suma de estos dos vectores:

$$\begin{aligned} P'(x', y') &= (x\cos\theta,\ \ x\operatorname{sen}\theta) + (-y\operatorname{sen}\theta,\ \ y\cos\theta) \\ &= (x\cos\theta\ - y\operatorname{sen}\theta,\ \ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta) \end{aligned}$$

Luego las coordenadas x', y' de P' son:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y' &= x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

Estas son las fórmulas de trasformación de coordenadas de la rotación en el plano.

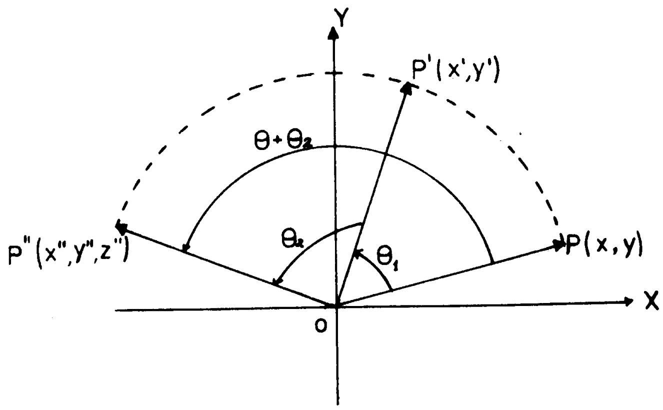


b) *Grupo de rotaciones en el plano.*

Observa que si rotamos el punto $P(x, y)$ según un ángulo θ_1 y luego rotamos según un ángulo θ_2 se obtiene la rotación producto según el ángulo $\theta_1 + \theta_2$.

En este caso las coordenadas de la imagen $P''(x'',\ y'')$ de $P(x, y)$ son:

$$\begin{aligned} x'' &= x\cos(\theta_1+\theta_2) - y\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2) \\ y'' &= x\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2) + y\cos(\theta_1+\theta_2) \end{aligned}$$



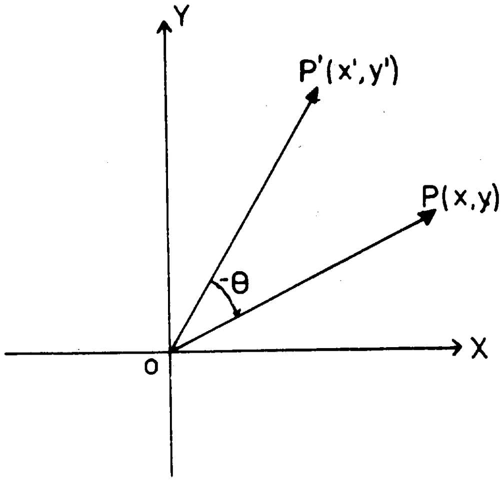
Fíjate también que si se tiene la rotación según el ángulo θ que manda $P(x, y)$ en $P'(x', y')$ la aplicación inversa, la que manda $P'(x', y')$ en $P(x, y)$, es otra rotación definida por el ángulo $-\theta$.

Las coordenadas x, y de la imagen del punto $P'(x', y')$ son:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(-\theta) - y' \operatorname{sen}(-\theta) \\ y &= x' \operatorname{sen}(-\theta) + y' \cos(-\theta) \end{aligned}$$

Recordando que $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$, se tiene

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\theta + y' \operatorname{sen}\theta \\ y &= -x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \end{aligned}$$



Similarmente al caso de las traslaciones, el hecho de que el producto de dos rotaciones del mismo centro sea una rotación y que la inversa de una rotación es otra rotación, nos dice que las rotaciones de un mismo centro forman un grupo de transformaciones.

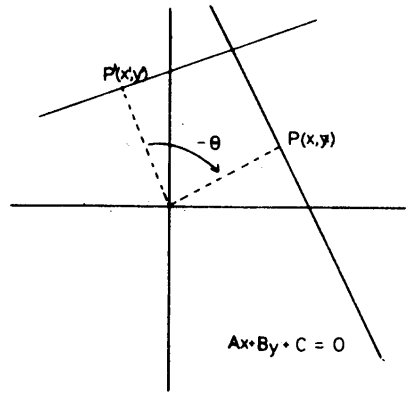
Este hecho también se podía haber demostrado analíticamente, de forma similar al caso de las traslaciones, usando sólo la fórmula de cambio de coordenadas de una rotación según un ángulo θ

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \\ y' &= x \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \end{aligned}$$

c) *Otras propiedades de las rotaciones.*

Utilizando coordenadas también podemos demostrar analíticamente que la rotación es un movimiento rígido y que transforma rectas en rectas, circunferencias en circunferencias, etcétera.

Veamos por ejemplo que una recta se transforma por una rotación de ángulo θ en otra recta. Consideremos la recta $Ax + By + C = 0$ y hallemos la ecuación de su imagen. Un punto $P'(x', y')$ está en la imagen sólo si al rotarlo según el ángulo $-\theta$ se transforma en un punto $P(x, y)$ que está en la recta, es decir que satisface la ecuación dada.



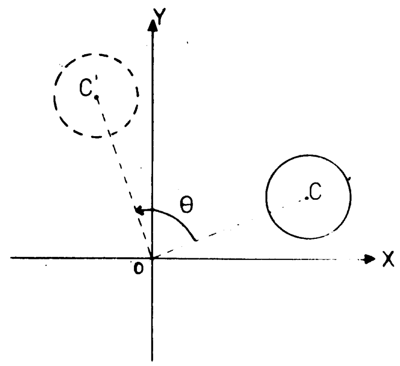
Según las fórmulas de cambio de coordenadas por la rotación según $-\theta$ tendríamos que

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\theta + y' \operatorname{sen}\theta \\ y &= -x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \end{aligned}$$

luego, $Ax+By+C=0 \Rightarrow A(x'\cos\theta + y'\operatorname{sen}\theta) + B(-x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) + C = 0$ agrupando los términos con x' e y' obtenemos:

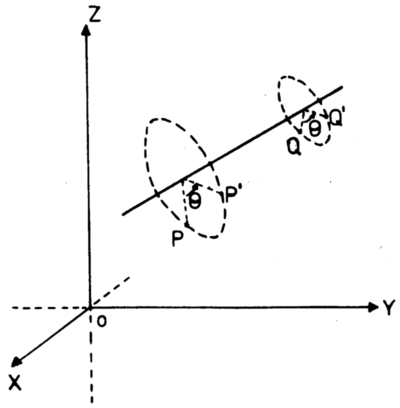
$$(A\cos\theta - B\operatorname{sen}\theta)x' + (A\operatorname{sen}\theta + B\cos\theta)y' + C = 0$$

Observa que todo punto $P'(x', y')$ que satisfaga esta última ecuación está en la imagen de la recta dada, luego al rotar nuestra recta, se obtiene otra recta, precisamente la recta representada por $(A\cos\theta - B\operatorname{sen}\theta)x + (A\operatorname{sen}\theta + B\cos\theta)y + C = 0$. Similarmente se puede ver, utilizando el mismo método, cómo se transforma por una rotación una circunferencia, hallando la ecuación de su imagen



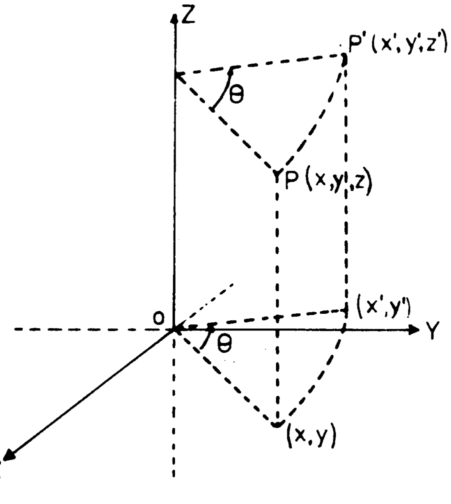
3. LA ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN EJE EN EL ESPACIO

En el espacio, dado un eje fijo y un ángulo θ, a cada punto P le hacemos corresponder el punto P', obtenido al rotar en el ángulo θ el punto P, alrededor del eje. Los puntos del eje se transforman en sí mismos.



Queremos hallar las coordenadas de P' conociendo las de P.Podemos simplificar mucho las fórmulas si tomamos las coordenadas de manera que el eje de rotación coincida con uno de los ejes de coordenadas, el eje de las z por ejemplo.

Dibujemos como de costumbre, el eje Z en forma vertical y consideremos una rotación alrededor de este eje por un ángulo constante θ. Queremos hallar las coordenadas de la imagen $P'(x', y', z')$ de $P(x, y, z)$ según esta rotación, obsérvese que la coordenada z



no varía al girar el punto P alrededor del eje, luego $z' = z$. Debemos entonces hallar las fórmulas del cambio para las coordenadas x e y. Pero nótese que éstas se transforman de acuerdo a una rotación en el plano XY según el mismo ángulo θ alrededor del origen O. Recordando cómo se transforman estas coordenadas en el plano XY tenemos:

$$
\begin{aligned}
x' &= x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta \\
y' &= x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta
\end{aligned}
$$

Luego la transformación de coordenadas por la rotación de ángulo θ de un punto $P(x, y, Z)$ alrededor del eje Z está dada por:

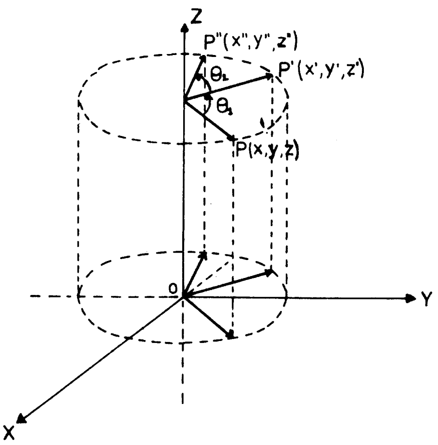
$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y' &= x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \\ z' &= z. \end{aligned}$$

a) *Grupo de las rotaciones alrededor de un eje*

Similarmente al caso de una rotación en el plano, si rotamos alrededor del eje Z un punto $P(x, y, z)$ según un ángulo θ_1 y rotamos según un ángulo θ_2, se obtiene la rotación producto de $P(x, y, z)$ según el ángulo $\theta_1 + \theta_2$.

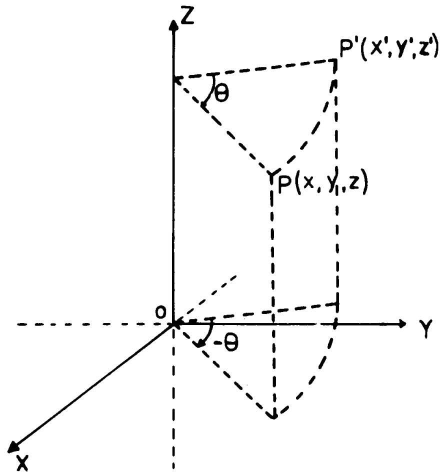
Las coordenadas de la imagen $P''(x'', y'', z'')$ de $P(x, y, z)$ son:

$$\begin{aligned} x'' &= x\cos(\theta_1+\theta_2) - y\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2) \\ y'' &= x\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2) + y\cos(\theta_1+\theta_2) \\ z'' &= z \end{aligned}$$



De igual manera, la transformación inversa de la rotación de ángulo θ alrededor del eje, la que manda $P'(x', y', z')$ de vuelta al punto $P(x, y, z)$ es la rotación alrededor del eje según el ángulo $-\theta$. La fórmula de transformación de coordenadas de esta rotación es ahora:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta + y'\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y &= -x'\,\mathrm{sen}\,\theta + y'\cos\theta \\ z &= z \end{aligned}$$



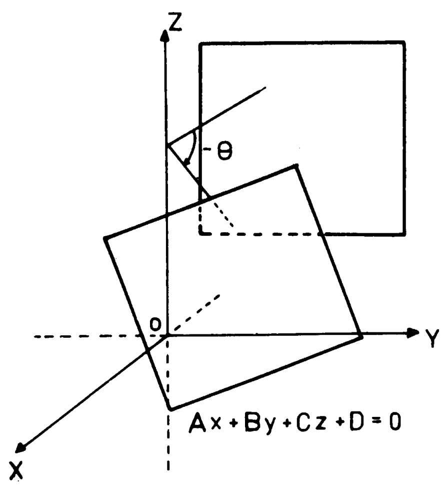
Estos dos últimos hechos también nos dicen en este caso que las rotaciones de un mismo eje forman un grupo de transformaciones.

b) *Otras propiedades*

Analíticamente podemos demostrar también, usando las fórmulas de cambio de coordenadas, que las rotaciones alrededor de un eje son movimientos rígidos, transforman rectas en rectas, esferas en esferas, planos en planos, etcétera.

Hallemos por ejemplo, la ecuación del plano imagen, según una rotación de ángulo θ alrededor del eje Z del plano $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$



Obsérvese que lo único que tenemos que hacer es sustituir x, y, z por sus expresiones en términos de x', y', z', en la ecuación del plano original: $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\begin{aligned} A(x'\cos\theta + y'\operatorname{sen}\theta) + B(-x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) + Cz' + D &= 0 \\ \Rightarrow (A\cos\theta - B\operatorname{sen}\theta)x' + (A\operatorname{sen}\theta + B\cos\theta)y' + Cz' + D &= 0 \end{aligned}$$

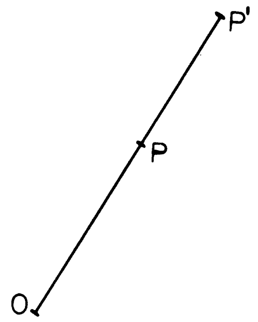
La ecuación del plano es:

$$(A\cos\theta - B\operatorname{sen}\theta)x + (A\operatorname{sen}\theta + B\cos\theta)y + Cz + D = 0$$

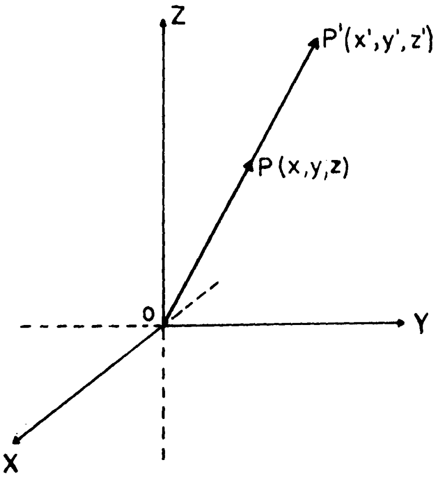
4. LA HOMOTECIA

Supongamos $k > 0$. La homotecia de centro O y razón k transforma cada punto P del espacio en un punto P' tal que $\overline{OP'} = k\overline{OP}$ y P' está en la recta definida por O y P.

$$\overline{OP'} = k\overline{OP}$$



Situemos el centro de la homotecia en el origen de coordenadas y hallemos las coordenadas x', y', z' de la imagen P', según esta transformación, del punto $P(x, y, z)$



como $\overline{OP'} = k\overline{OP}$, $P(x', y', z') = kP(x, y, z)$, se tiene entonces

$$\begin{aligned} x' &= kx \\ y' &= ky \\ z' &= kz \end{aligned}$$

Estas son las fórmulas de cambio de coordenadas de un punto $P(x, y, z)$ según una homotecia de centro O y razón k. Observa que basta multiplicar cada coordenada por k.

Como ya sabemos la homotecia no es una transformación rígida, ya que agranda o achica las distancias según k sea mayor o menor que 1.

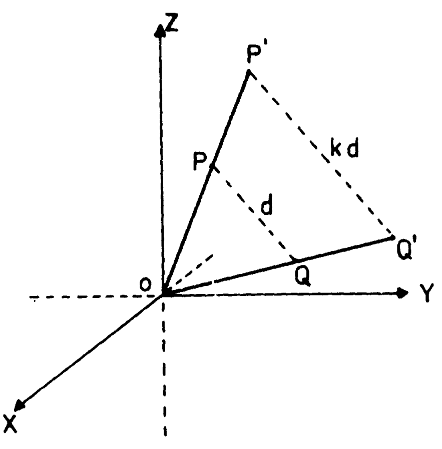
Utilizando coordenadas podemos ver esto analíticamente.

Si $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos del espacio y si $P'(x'_1, y'_1, z'_1)$ y $Q'(x'_2, y'_2, z'_2)$ son las imágenes de P y Q según una homotecia de centro O y razón $k > 0$ entonces se tendrá que:

$$\begin{aligned} x'_1 &= kx_1 & x'_2 &= kx_2 \\ y'_1 &= ky_1 & y'_2 &= ky_2 \\ z'_1 &= kz_1 & z'_2 &= kz_2 \end{aligned}$$

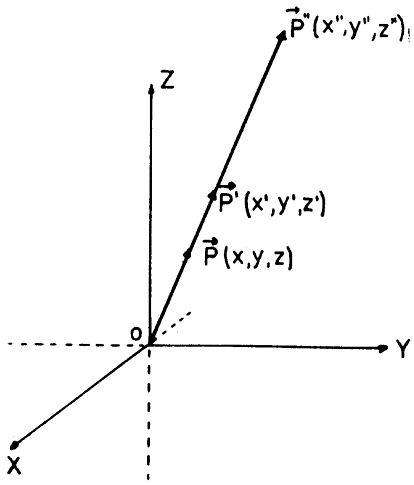
Luego:

$$\begin{aligned} d(P', Q') &= \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (z'_1 - z'_2)^2} \\ &= \sqrt{(kx_1 - kx_2)^2 + (ky_1 - ky_2)^2 + (kz_1 - kz_2)^2} \\ &= k\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = kd(P, Q) \end{aligned}$$



Si ahora transformamos un punto P, según una homotecia de centro O y razón k_1 en un punto P'; y luego transformamos P', según una homotecia de centro O y razón k_2, obtenemos la transformación de P según la homotecia producto cuya razón es el producto de las razones $k_1 \cdot k_2$.

Las coordenadas x'', y'', z'' de la imagen de $P(x, y, z)$ son ahora:



$$x'' = k_1k_2x$$
$$y'' = k_1k_2y$$
$$z'' = k_1k_2z$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{P}' & = & k_1\mathbf{P} \\ \mathbf{P}'' & = & k_2\mathbf{P}' \Rightarrow \mathbf{P}'' = k_2k_1\mathbf{p} \end{array} \right.$$

Se tiene también que la inversa de una homotecia de razón k_1 la que transforma $P'(x', y', z')$ en $P(x, y, z)$, es otra homotecia de razón $\frac{1}{k}$. Las fórmulas de cambio de coordenadas correspondientes son:

$$\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{k}x' \\ y & = & \frac{1}{k}y' \\ z & = & \frac{1}{k}z' \end{array}$$

Se tiene entonces que el producto de dos homotecias de igual centro es una homotecia del mismo centro, y la inversa de una homotecia es otra homotecia. Las homotecias del mismo centro forman un grupo de transformaciones.

Este hecho se puede ver sólo utilizando las fórmulas de cambio de coordenadas que definen la homotecia. Al igual que en las transformaciones anteriores, usando coordenadas, también podemos demostrar que las rectas se transforman en rectas, esferas en esferas, planos en planos, etcétera.

Es fácil ver por ejemplo, que el plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ se transforma en el plano de ecuación $\frac{A}{k}x + \frac{B}{k}y + \frac{C}{k}z + D = 0$.

EJERCICIOS

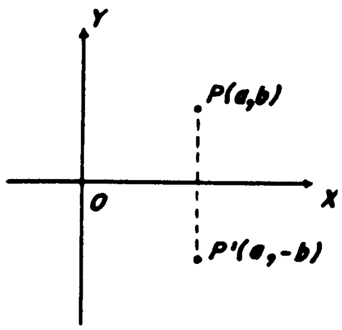
1. Pruebe que la rotación en el plano (o en el espacio) es un movimiento rígido.
2. Hallar la ecuación de la curva imagen de $2x^2 + 3y^2 - 8x + 8y = 7$ según la traslación por el vector $\mathbf{V}(-2, 1)$.
3. Hallar la ecuación de la imagen de la circunferencia de centro $C(2, 2)$ y radio 2, según una rotación de centro O y ángulo $45°$
4. Hallar la ecuación de la imagen de una esfera de centro $C(0, 2, 2)$ y radio 2, según una rotación alrededor del eje Z de ángulo $45°$.
5. Hallar la ecuación de la imagen de la recta $\begin{cases} 3x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ x - 2y - z + 4 = 0 \end{cases}$ según una homotecia de centro O y razón k.
6. Hallar la ecuación de la imagen del plano $4x + 11y + 5z - 10 = 0$ según la traslación por el vector $\mathbf{V}(1, -3, 5)$.
7. Hallar la ecuación de la imagen de $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 80x - 60y = 0$ según una rotación alrededor del origen por un ángulo $\theta = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{4}{3}\right)$, y describir la curva imagen.
8. Hallar la ecuación de la imagen de la esfera $x^2+y^2+z^2-6x+4y-3z = 15$ según una homotecia de centro O y razón 4.
9. Hallar la ecuación de la imagen de la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ según rotación de centro O y ángulo $\theta = 315°$ y una traslación según el vector $\mathbf{V}(-1, 1)$.
10. Hallar las fórmulas de transformación de coordenadas, al rotar un punto $P(x, y, z)$ alrededor del eje X.
11. Hallar la ecuación de la imagen del plano $2x + y - z + 6 = 0$ según una rotación alrededor del eje X de ángulo $\theta = 30°$.
12. Por medio de una traslación adecuada, transformar la ecuación $3x^2 - 4y^2 + 6x + 24y = 135$. en otra en la cual los coeficientes de los términos de primer grado sean nulos, y describa la figura que representa.
13. Demostrar, aplicando una traslación adecuada, que la ecuación $y^2 - 6y - 4x + 5 = 0$ representa una parábola.
14. Demostrar, aplicando una rotación adecuada, que la ecuación $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$ representa una elipse.
15. Demostrar aplicando una traslación y una rotación adecuada que la ecuación $x^2 - 10xy + y^2 + x + y + 1 = 0$ representa una hipérbola.

CAPíTULO 17

TRANSFORMACIONES LINEALES EN EL PLANO.

Vamos a estudiar algunas de las transformaciones del plano en si mismo, usando el concepto de vectores y coordenadas.

Ya conocemos las simetrías. Consideremos la simetría respecto al eje X en el plano. Esta aplicación manda un punto P del plano a un punto P' situado sobre la recta perpendicular al eje X que pasa por P, de tal manera que la distancia de P' al eje X es igual a la distancia del eje X al punto P. Esta transformación manda al vector de extremo (a, b) al vector de extremo $(a, -b)$.



Veamos algunas propiedades de la simetría:

a) Consideremos $P(a, b)$ y $Q(c, d)$. La aplicación manda P en $P'(a, -b)$ y Q en $Q'(c, -d)$. Ahora, $\mathbf{P}+\mathbf{Q}$ tiene coordenadas $(a + c, b + d)$, y la transformación manda

$$\mathbf{P}+\mathbf{Q} \text{ en } (\mathbf{P} + \mathbf{Q})' = (a + c, -[b + d]) = (a + c, -b - d).$$

Por otro lado,

$$\mathbf{P}' + \mathbf{Q}' = (a, -b) + (c, -d) = (a + c, -b - d) = (\mathbf{P} + \mathbf{Q})'$$

En definitiva, tenemos que $(\mathbf{P} + \mathbf{Q})' = \mathbf{P}' + \mathbf{Q}'$, es decir, la imagen de la suma es la suma de las imágenes.

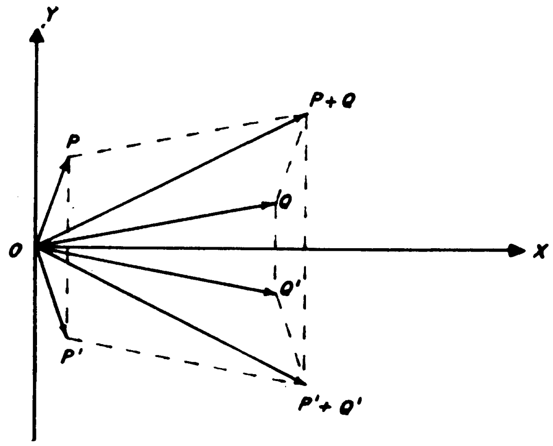
b) También se tiene que si r es un número (número real), el vector $r\mathbf{P} = (ra, rb)$, tiene como imagen

$$(r\mathbf{P})' = (ra, -rb)$$

y como

$$r\mathbf{P}' = r(a, -b) = (ra, -rb), \quad \text{se tiene} \quad (r\mathbf{P})' = r\mathbf{P}',$$

c) Finalmente, esta aplicación es biyectiva.



Transformaciones del plano en si mismo o del espacio en si mismo con estas propiedades, son las que llamamos transformaciones lineales. La linealidad está dada por las propiedades a y b solamente. Nosotros pedimos también la propiedad c), porque la hemos exigido a todas las transformaciones geométricas.

Una *transformación lineal* es una aplicación biyectiva[1] **T**, tal que si **A** y **B** son vectores, y n es un número real, entonces

a) $\mathbf{T}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{T}(\mathbf{A}) + \mathbf{T}(\mathbf{B})$
b) $\mathbf{T}(r\mathbf{A}) = r\mathbf{T}(\mathbf{A})$.

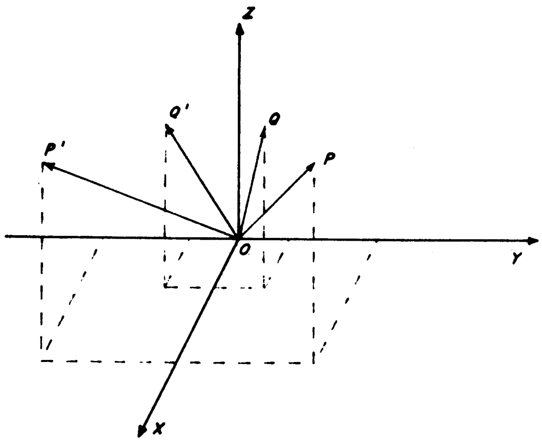
Es decir, es lo mismo sumar **A** y **B** y hallar su imagen, que hallar las imágenes de **A** y de **B**, y luego sumarías, y es igual multiplicar un número r por **A** y hallar su imagen, que hallar la imagen de **A** y luego multiplicarla por r.

EJEMPLOS

1°) Ejemplos de transformaciones lineales son todas las simetrías respecto a rectas o planos que pasan por el origen, todas las rotaciones respecto al origen (en el plano) y respecto a ejes que pasen por el origen (en el espacio). También la homotecia de centro O y razón k es una transformación lineal.

Veamos por qué. Ya vimos un ejemplo de simetría en el plano. En el espacio, consideremos la simetría respecto al plano XZ

[1]Generalmente una aplicación se dice lineal si cumple a y b solamente, pero como en este curso sólo estudiamos transformaciones biyectivas, también exigimos esta condición para cada aplicación lineal.



Este es un ejemplo de simetría respecto a un plano que pasa por el origen. Si un vector tiene coordenadas (x, y, z), su imagen tiene coordenadas $(x, -y, z)$. Así,

$$(x', y', z') = T(x, y, z) = (x, -y, z).$$

Esta aplicación es biyectiva.

Consideremos los vectores **P** y **Q**, **P** de coordenadas (x, y, z) y **Q** de coordenadas (u, v, w). Se tiene

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = (x + u, \;\; y + v, \;\; z + w)$$

y

$$\mathbf{T}(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) = (x + u, \;\; -(y + v), \;\; z + w)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{P}) + \mathbf{T}(\mathbf{Q}) &= (x, -y, z) + (u, -v, w) \\ &= (x + u, \;\; -y - v, \;\; z + w) \\ &= (x + u, \;\; -(y + v), \;\; z + w). \end{aligned}$$

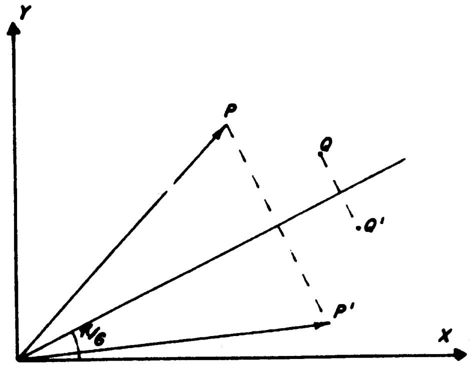
y por lo tanto $\mathbf{T}(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) = \mathbf{T}(\mathbf{P}) + \mathbf{T}(\mathbf{Q})$. Entonces se satisface la propiedad a) de una transformación lineal.

Además, sí r es un número, $r\mathbf{P} = (rx, \; ry, \; rz)$ y

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(r\mathbf{P}) &= (rx, \;\; -ry, \;\; rz) \\ &= r(x, -y, z) \\ &= r\mathbf{T}(\mathbf{P}). \end{aligned}$$

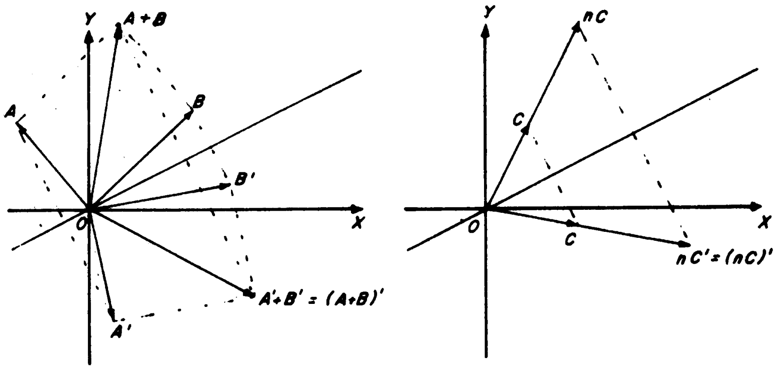
Entonces también se satisface la propiedad b) de una transformación lineal. La simetría respecto al plano XZ en el espacio es una transformación lineal.

2°) Veamos ahora una simetría del plano respecto a una recta que pasa por el origen formando un ángulo de 30°, es decir $\frac{\pi}{6}$ radianes, con el eje X.



En los ejemplos anteriores hemos probado que las transformaciones son lineales hallando antes las fórmulas según las cuales se transforman las coordenadas de cada punto. ¿Pero, qué pasa si no podemos hallar esas fórmulas fácilmente?

Esta vez, no trataremos de encontrar antes las fórmulas, sino que usted debe convencerse observando las figuras, de que esta transformación es efectivamente lineal, y luego buscaremos las fórmulas para transformar las coordenadas usando las propiedades de las transformaciones lineales.



Ahora que está convencido de que esta aplicación es lineal, pasemos a encontrar las fórmulas. Cambiemos primero la notación, de manera que en lugar de escribir $\mathbf{A}'$ para indicar el vector obtenido al reflejar el vector **A** escribimos $T(\mathbf{A})$: esto es similar a la notación que se usa en funciones.

Supongamos que nos dicen cuál es la imagen del vector **i** $= (1, 0)$ y del vector **j** $= (0, 1)$, es decir, nos dan los vectores $\mathbf{T}(\mathbf{i})$ y $\mathbf{T}(\mathbf{j})$. La pregunta es: ¿Cuál es la imagen del vector **P** $= (x, y)$?

Sabemos que **T** es una transformación lineal, y que **P** $= x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{P}) &= \mathbf{T}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \\ &= \mathbf{T}(x\mathbf{i}) + \mathbf{T}(y\mathbf{j}) \end{aligned}$$

por la propiedad a) de las transformaciones lineales.

$$\mathbf{T}(x\mathbf{i}) = x\mathbf{T}(\mathbf{i})$$

por la propiedad b) de las transformaciones lineales. Por la misma razón,

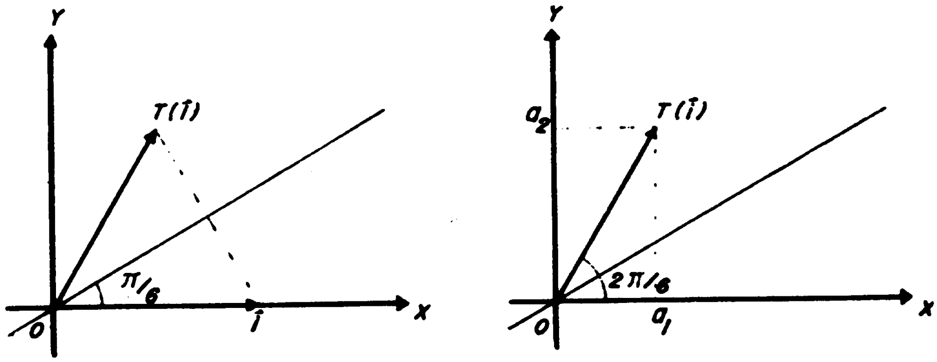
$$\mathbf{T}(y\mathbf{j}) = y\mathbf{T}(\mathbf{j}),$$

y por lo tanto

$$\mathbf{T}(x\mathbf{i}) + \mathbf{T}(y\mathbf{j}) = x\mathbf{T}(\mathbf{i}) + y\mathbf{T}(\mathbf{j})$$

Entonces, $\mathbf{T}(\mathbf{P}) = x\mathbf{T}(\mathbf{i}) + y\mathbf{T}(\mathbf{j})$. Así se obtiene la imagen del vector **P** en términos de $\mathbf{T}(\mathbf{i})$, $\mathbf{T}(\mathbf{j})$ y de las coordenadas de **P**.

Usemos esto para hallar las fórmulas de cambio de coordenadas en el ejemplo anterior. Comencemos hallando la imagen del vector **i**.

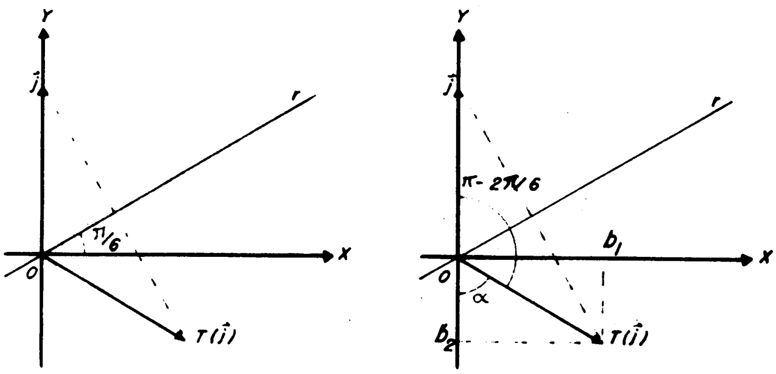


En la figura se observa que el eje de simetría r es la bisectriz del ángulo formado por los vectores $\mathbf{i}$. y $\mathbf{T}(\mathbf{i})$, y por lo tanto, el ángulo entre $\mathbf{i}$. y $\mathbf{T}(\mathbf{i})$, es $\dfrac{2\pi}{6}$ Recordemos que una simetría no cambia las longitudes, de manera que $\mathbf{T}(\mathbf{i})$ tiene la misma longitud que **i** es decir, $\mathbf{T}(\mathbf{i})$ tiene longitud 1. Con esto basta, pues usando trigonometría se llega a que las coordenadas $(a_1, a_2,)$ de $\mathbf{T}(\mathbf{i})$ son

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos\frac{2\pi}{6} \\ a_2 &= \operatorname{sen}\frac{2\pi}{6}. \end{aligned}$$

Veamos ahora las coordenadas de $\mathbf{T}(\mathbf{j})$. De nuevo, según la figura el eje de simetría r, es bisectriz del ángulo formado por **j** y $\mathbf{T}(\mathbf{j})$. Como **j** forma un ángulo $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}$ con r, el ángulo entre **j** y $\mathbf{T}(\mathbf{j})$ es dos veces este valor, es decir,

$$2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \pi - \frac{2\pi}{6},$$



como este ángulo y el ángulo α son suplementarios, α vale $2\frac{\pi}{6}$. Otra vez por trigonometría, las coordenadas (b_1, b_2) de $\mathbf{T}(\mathbf{j})$ son

$$\begin{aligned} b_1 &= \operatorname{sen}\frac{2\pi}{6} \\ b_2 &= -\cos\frac{2\pi}{6} \end{aligned}$$

Entonces, si $\mathbf{P} = (x, y)$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{P}) &= x\mathbf{T}(\mathbf{i}) + y\mathbf{T}(\mathbf{j}) \\ &= x(a_1, a_2) + y(b_1, b_2) \\ &= x\left(\cos\frac{2\pi}{6}, \operatorname{sen}\frac{2\pi}{6}\right) + y\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{6}, -\cos\frac{2\pi}{6}\right) \\ &= \left(x\cos\frac{2\pi}{6} + y\operatorname{sen}\frac{2\pi}{6}, x\operatorname{sen}\frac{2\pi}{6} - y\cos\frac{2\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

Es decir, las coordenadas (x', y') de $\mathbf{T}(\mathbf{P})$ son:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\frac{2\pi}{6} + y\operatorname{sen}\frac{2\pi}{6} \\ y' &= x\operatorname{sen}\frac{2\pi}{6} - y\cos\frac{2\pi}{6} \end{aligned}$$

* * *

Observación: Las expresiones para x' e y' son polinomios homogéneos de primer grado en las variables x e y. Esta es la razón por la cual a las transformaciones que estamos estudiando se las llama lineales.

Las expresiones correspondientes a los dos primeros ejemplos son:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \end{aligned}$$

para la simetría del plano respecto al eje X

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \\ z' &= z \end{aligned}$$

para la simetría del espacio respecto al plano XZ. En todos los casos, las expresiones de las coordenadas de las imágenes son polinomios homogéneos de primer grado.

$* * *$

3°) Veamos otro ejemplo, la homotecia de centro O y razón k, en el espacio.

Si $H(\mathbf{P})$ denota la imagen del vector **P**, se tiene $H(\mathbf{P}) = k\mathbf{P}$. Entonces si $\mathbf{P} = (x, y, z)$, $H(\mathbf{P}) = k(x, y, z) = (kx,\ ky,\ kz)$ luego:

$$\begin{aligned} x' &= kx \\ y' &= ky \\ z' &= kz \end{aligned}$$

Nuevamente, las coordenadas de la imagen son polinomios homogéneos de primer grado en las coordenadas de **P** y por lo que podemos deducir de los ejemplos anteriores, esto hace que la homotecia de centro O sea una transformación lineal. Compruébelo como ejercicio.

$* * *$

Al desarrollar el ejemplo de la simetría, encontramos que bastaba dar las imágenes de los vectores **i** y **j** para conocer la imagen de cualquier otro vector. Veamos esto con más detalle. Si **T** es una transformación lineal del plano y **P**$= (x, y)$, entonces **T** es biyectiva y

$$\mathbf{T}(\mathbf{P}) = x\mathbf{T}(\mathbf{i}) + y\mathbf{T}(\mathbf{j}).$$

Esto nos dice que la transformación está determinada totalmente por las imágenes de los vectores **i** y **j**. Para dar una transformación lineal, basta dar las imágenes de los vectores **i** y **j** (y decir que la transformación es lineal).

Como ejemplo, consideremos la transformación lineal que manda **i** en $\mathbf{i}' = 2\mathbf{i}$ y el vector **j** en el vector $\mathbf{j}'$ =**j**. Con la notación de aplicaciones, esto se escribe:

$$\mathbf{T}(\mathbf{i}) = 2\mathbf{i} \ \text{ y } \ \mathbf{T}(\mathbf{j}) = \mathbf{j}$$

Con estas imágenes para **i** y **j**, la transformación lineal manda $\mathbf{P}(x, y)$ en $\mathbf{T}(\mathbf{P}) = \mathbf{T}(x\mathbf{i} + y\mathbf{i}) = x\mathbf{T}(\mathbf{i}) + y\mathbf{T}(\mathbf{j}) = x2\mathbf{i} + y\mathbf{j} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

Esto es, conociendo las imágenes de **i** y **j**, conocemos la de cualquier otro vector, de manera que si $\mathbf{T}(\mathbf{P})$ tiene coordenadas (x', y') entonces

$$\begin{aligned} x' &= 2x \\ y' &= y \end{aligned}$$

Con esto tenemos la linealidad. Pero aunque ya hemos definido la transformación, debemos probar que es biyectiva.

Sabemos que una aplicación es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva. Comencemos con la sobreyectividad: **T** es sobreyectiva, si dado cualquier vector $\mathbf{P}'$ de coordenadas (x', y') existe un vector **P** de coordenadas (x, y) tal que $\mathbf{T}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}'$. Eso es, conociendo x' e y', debemos ver si existen x e y tales que:

$$\begin{aligned} x' &= 2x \\ y' &= y \end{aligned}$$

Esto es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, queremos encontrar su solución, si es que la tiene. Sabemos del bachillerato, que un sistema de ecuaciones como éste tiene solución única si y sólo si su determinante es distinto de cero. En nuestro caso, el determinante es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

y como $2 \neq 0$, el sistema tiene solución. Entonces **T** es sobreyectiva.

Pasemos a la inyectividad. **T** es inyectiva si dados **P** y **Q** vectores del plano, el hecho de que $\mathbf{T}(\mathbf{P}) = \mathbf{T}(\mathbf{Q})$ implica que **P**=**Q**.

Tomemos entonces dos vectores **P** y **Q**, y supongamos que $T(\mathbf{P}) = T(\mathbf{Q})$. Las coordenadas de **P** y las coordenadas de **Q** satisfacen simultáneamente el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x' &= 2x \\ y' &= y\,; \end{aligned}$$

no olvidemos que $(x', y') = \mathbf{T}(\mathbf{P}) = \mathbf{T}(\mathbf{Q})$ por hipótesis.

Como el determinante de este sistema es distinto de cero, la solución es única, y por tanto $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$. Hemos demostrado que **T** es inyectiva.

En conclusión, el hecho de que **T** es biyectiva depende únicamente de que el determinante del sistema

$$\begin{aligned} x' &= 2x \\ y' &= y \end{aligned}$$

sea distinto de cero.

Veamos más generalmente lo que hemos hecho. Supongamos que **T** es una transformación lineal en el plano, y que conocemos las imágenes de **i** y **j** bajo **T**.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{i}) &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} \\ \mathbf{T}(\mathbf{j}) &= b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}\,. \end{aligned}$$

Sabemos entonces cuál es la imagen de cualquier otro vector $\mathbf{P} = (x, y)$: es

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) &= \mathbf{T}(x\mathbf{i}) + \mathbf{T}(y\mathbf{j}) \\ &= x(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) + y(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) \\ &= (xa_1 + yb_1)\mathbf{i} + (xa_2 + yb_2)\mathbf{j}\,, \end{aligned}$$

es decir, las coordenadas (x', y') de $\mathbf{T}(\mathbf{P})$ son

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y \\ y' &= a_2x + b_2y. \end{aligned}$$

Pedir que **T** sea biyectiva es pedir que el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

sea distinto de cero. La razón ya la conocemos: un sistema de ecuaciones lineales con determinante distinto de cero tiene solución (esto da sobreyectividad) única (esto da inyectividad).

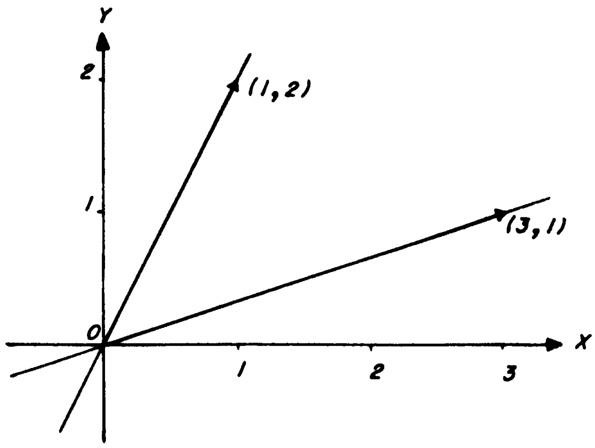
* * *

Veamos ahora, en qué se transforman determinados conjuntos por transformaciones lineales. Supongamos que nos dan una transformación lineal que manda **i** en $(-1, 3)$ y **j** en $(2, -1)$. Ya sabemos que esta transformación manda el vector (x, y) en el vector (x', y') con

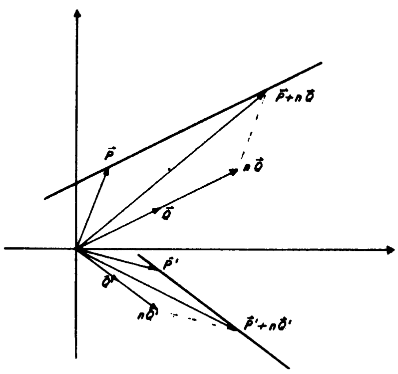
$$\begin{aligned} x' &= -x + 2y \\ y' &= 3x - y \end{aligned}$$

Pruebe usted mismo que esta transformación es biyectiva.

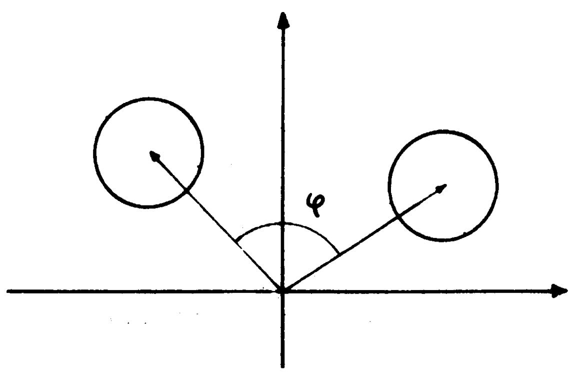
Nos dan la recta formada por los puntos $r(1, 2)$, (con $r \in \mathbb{R}$) es decir, todos los múltiplos del vector $(1, 2)$; esta recta pasa por el origen. ¿En qué se transforman? La transformación lineal manda $(1, 2)$ en el vector $(-1 + 2 \cdot 2,\ 3 \cdot 1 - 2) = (3, 1) = (3, 1)$ y por las propiedades de las transformaciones lineales, ésta manda los vectores $r(1, 2)$ en $r(3, 1)$. Entonces la imagen de la recta definida por $(1, 2)$ es la recta que pasa por el origen, definida por $(3, 1)$



Veamos qué ocurre si la recta no pasa por el origen. Sabemos que una recta arbitraria puede describirse como los puntos de la forma $\mathbf{P} + r\mathbf{Q}$, donde $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son vectores fijos, y r es algún número real. Ahora, la transformación lineal manda el vector $\mathbf{P}$ a cierto vector $\mathbf{P}'$, y el $\mathbf{Q}$ a cierto $\mathbf{Q}'$. Por las propiedades de las transformaciones lineales, sabemos que el vector $\mathbf{P} + r\mathbf{Q}$ tiene como imagen el vector $\mathbf{P}' + r\mathbf{Q}'$. Observemos que esto también corresponde a puntos de una recta: la recta paralela al vector $\mathbf{Q}'$ que pasa por $\mathbf{P}'$.



Veamos otros ejemplos: una rotación es una transformación lineal y manda una circunferencia en otra.



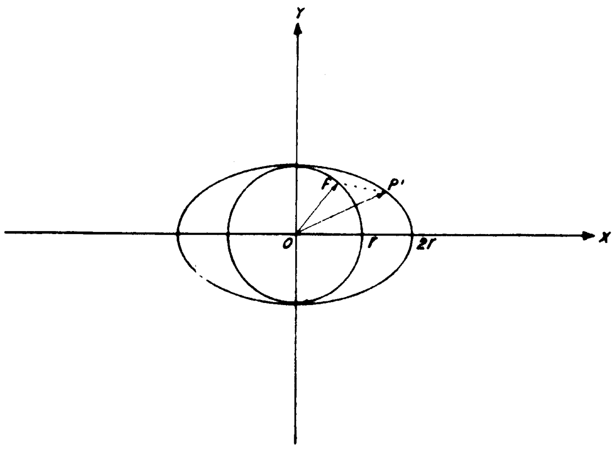
Consideremos la transformación lineal que manda **i** en 2**i** y **j** en **j**. Esta transformación manda circunferencias en elipses. Ya sabemos que esta transformación manda (x, y) en (x', y') con

$$\begin{aligned} x' &= 2x \\ y' &= y \end{aligned}$$

Veamos qué pasa con la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$; de $x' = 2x$ se sigue $x = x'/2$. Entonces si $P(x, y)$ es un punto de la circunferencia, debemos tener que

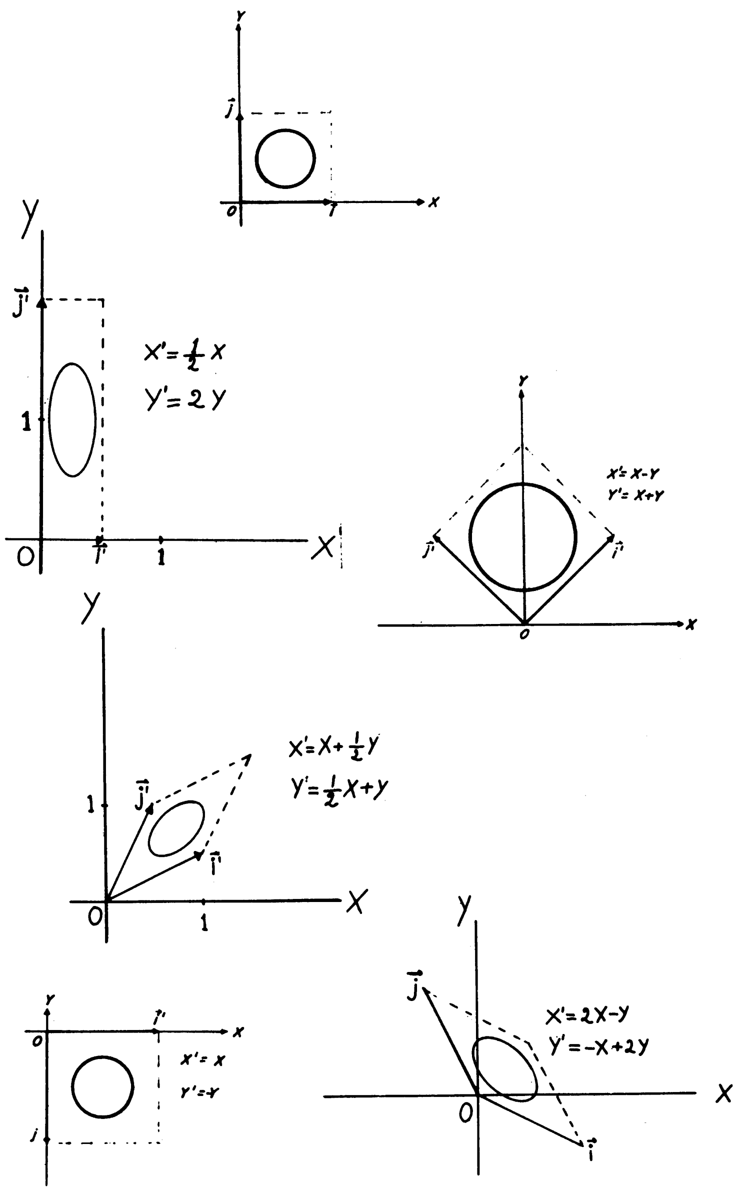
$$\begin{aligned} (x'/2)^2 + (y')^2 &= r^2, \quad \text{ó} \\ (x')^2/4r^2 + (y')^2/r^2 &= 1 \end{aligned}$$

Esto es una elipse de semiejes r y $2r$.



* * *

Para terminar vamos a ver cómo se transforma la figura de abajo según algunas transformaciones lineales



EJERCICIOS

1. En cada caso hallar las fórmulas de cambio de coordenadas de las transformaciones lineales definidas por:

a) $\mathbf{T}(\mathbf{i}) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

$\mathbf{T}(\mathbf{i}) = 3\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$

b) $\mathbf{T}(\mathbf{i}) = \mathbf{i}$

$\mathbf{T}(\mathbf{j}) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

c) $\mathbf{T}(\mathbf{i}) = -\mathbf{i}$

$\mathbf{T}(\mathbf{j}) = -\mathbf{j}$

d) $\mathbf{T}(\mathbf{i}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$

$\mathbf{T}(\mathbf{j}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$

2. Probar que las transformaciones anteriores son biyectivas.
3. Hallar las fórmulas de cambio de coordenadas para la simetría del plano según la recta que pasa por el origen formando un ángulo de $\frac{\pi}{3}(60°)$, sin usar las propiedades de las transformaciones lineales.
4. Hacer el ejercicio 3 usando propiedades de las transformaciones lineales (hallar las imágenes de **i** y **j**, etc.).
5. Hallar la imagen de la recta $y = 2x + 3,$ la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ y la hipérbola $y = \frac{4}{x}$ bajo cada una de las transformaciones lineales del ejercicio 1. ¿Qué se concluye?
6. Se tiene una aplicación del plano en sí mismo que transforma las coordenadas de cada punto según las fórmulas

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 3y \\ y' &= \frac{4}{3}x + 2y \end{aligned}$$

Probar que esta aplicación satisface las propiedades a) y b) de una transformación lineal, pero que no es biyectiva.
7. ¿Por qué la aplicación definida por las fórmulas

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 4y + 1 \\ y' &= x - y \end{aligned}$$

no es una transformación lineal?
8. Diga si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas
   a) Una transformación lineal transforma el origen en sí mismo.
   b) Una transformación lineal puede mandar un punto que no es el origen en el origen.
   c) Una transformación lineal puede mandar una recta en una circunferencia.
   d) Una transformación lineal puede mandar una hipérbola en una parábola.
   e) Una transformación lineal siempre manda rectas en rectas.
   f) Si una aplicación satisface las propiedades a) y b) de la definición de una transformación lineal, entonces es biyectiva.
   g) La aplicación que manda todo punto del plano en el punto $(1, 4)$ es lineal.
9. Hallar las fórmulas de cambio de coordenadas por una rotación de centro O y ángulo θ. Verifique que el determinante del sistema obtenido toma siempre el valor 1, cualqueira que sea el ángulo θ.

10. *a*) Demuestre que: La hipérbola equilátera de ecuación $x^2 - y^2 = 1$ se transforma por una rotación de $\frac{\pi}{4}$ alrededor del origen en la hipérbola equilátera de ecuación $2xy = 1$

    b) Dibuje estas dos hipérbolas

    c) ¿Que trasformación lineal transforma la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 1$ es la hipérbola equilátera $xy = 1$?

CAPíTULO 18

TRANSFORMACIONES LINEALES EN EL ESPACIO

Al igual que en el plano, una transformación lineal en el espacio queda determinada al darse las imágenes de los vectores $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ Antes de ver por qué, repitamos la definición de transformación lineal.

Una transformación lineal es una aplicación biyectiva $\mathbf{T}$ tal que:

a) Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son vectores, entonces $\mathbf{T}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{T}(\mathbf{A}) + \mathbf{T}(\mathbf{B})$;

b) Si r es un número real, entonces $\mathbf{T}(r\mathbf{A}) = r\mathbf{T}(\mathbf{A})$.

Supongamos que $\mathbf{T}$ es una transformación lineal. Si $\mathbf{P}(x, y, z)$ es un vector, como podemos escribir.

$$\mathbf{P} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{P}) &= \mathbf{T}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \\ &= \mathbf{T}(x\mathbf{i}) + \mathbf{T}(y\mathbf{j}) + \mathbf{T}(z\mathbf{k}) \end{aligned}$$

por la propiedad a). Además, por la propiedad b):

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(x\mathbf{i}) &= x\mathbf{T}(\mathbf{i}) \\ \mathbf{T}(y\mathbf{j}) &= y\mathbf{T}(\mathbf{j}) \\ \mathbf{T}(z\mathbf{k}) &= z\mathbf{T}(\mathbf{k}), \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\mathbf{T}(\mathbf{P}) = x\mathbf{T}(\mathbf{i}) + y\mathbf{T}(\mathbf{j}) + z\mathbf{T}(\mathbf{k}).$$

Observando esta fórmula, comprendemos fácilmente que basta con conocer las imágenes por $\mathbf{T}$ de $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, para conocer la imagen del vector $\mathbf{P}$ por la transformación lineal $\mathbf{T}$.

Por ejemplo, si una transformación lineal $\mathbf{T}$ manda $\mathbf{i}$ en $\mathbf{T}(\mathbf{i}) = \mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$; $\mathbf{j}$ en $\mathbf{T}(\mathbf{j}) = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ en $\mathbf{T}(\mathbf{k}) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, queremos saber cuál es la imagen del vector $\mathbf{P}(x, y, z)$. Por lo que sabemos, ésta es

$$\mathbf{T}(\mathbf{P}) = x\mathbf{T}(\mathbf{i}) + y\mathbf{T}(\mathbf{j}) + z\mathbf{T}(\mathbf{k})$$

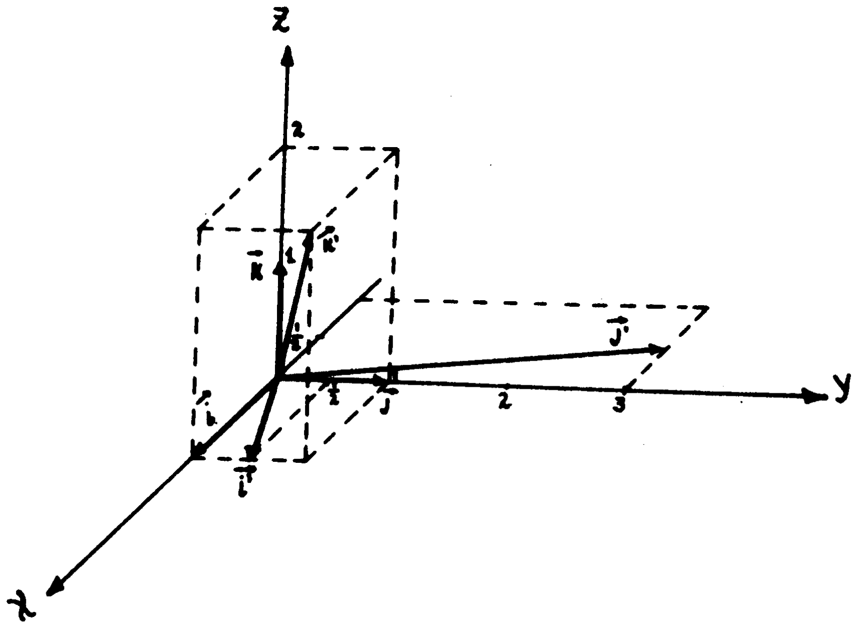
y sustituyendo, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{P}) &= x\left(\mathbf{i}+\tfrac{1}{2}\mathbf{j}\right)+y\left(-\tfrac{1}{2}\mathbf{i}+3\mathbf{j}\right)+z\left(\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}\right)\\ &= \left(x-\tfrac{1}{2}y+z\right)\mathbf{i}+\left(\tfrac{1}{2}x+3y+z\right)\mathbf{j}+2z\mathbf{k}.\end{aligned}$$

De aquí podemos leer directamente las fórmulas que dan las coordenadas (x', y', z') de $\mathbf{T}(\mathbf{P})$ en términos de las de $\mathbf{P}$:

$$\begin{aligned} x' &= x-\frac{1}{2}y+z\\ y' &= \tfrac{1}{2}x+3y+z\\ z' &= 2z\end{aligned}$$

Observemos que estas fórmulas son polinomios homogéneos de primer grado en las variables x, y, z. Al igual que en el caso del plano, ésta es la razón por la cual se llama lineales a estas transformaciones.



Nótese ahora. que aunque hemos hallado la imagen de P por la aplicación **T,** lo único que podemos asegurar es que la aplicación así definida (es decir, la que manda (x, y, z) en (x', y', z') por las fórmulas de arriba) satisface las propiedades a) y b) de una transformación lineal: no sabemos si es biyectiva. Para resolver este problema, procedemos igual que en el caso del plano. Para ver la sobreyectividad, nos imaginamos que el conjunto de ecuaciones de arriba es un sistema en donde conocemos $P'(x', y', z')$ y las incógnitas son x, y, z. Si el sistema tiene solución para cualquier valor de x', y', z', entonces **T** es sobreyectiva. Y si la solución es única, entonces **T** es inyectiva. Como sabemos que un sistema lineal tiene solución única si y sólo si el determinante es distinto de cero, basta con que el determinante sea distinto de cero para que la aplicación **T** sea biyectiva. En nuestro caso, el determinante es:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{13}{2} \neq 0$$

y por lo tanto **T** efectivamente es biyectiva.

De este ejemplo y de lo que podemos generalizar del capítulo anterior, llegamos a la conclusión siguiente: Una transformación lineal transforma un vector $\mathbf{P}(x, y, z)$ en el vector $\mathbf{P}'(x', y', z')$ según las fórmulas

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z \end{aligned}$$

que son polinomios homogéneos de primer grado. Los coeficientes significan lo siguiente:

$$\begin{array}{lll} (a_1,\, a_2,\, a_3) & \text{es la imagen de} & \mathbf{i} \\ (b_1,\, b_2,\, b_3) & \text{es la imagen de} & \mathbf{j} \\ (c_1,\, c_2,\, c_3) & \text{es la imagen de} & \mathbf{k} \end{array}$$

y se debe satisfacer la condición de biyectividad

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

* * *

EJEMPLOS DE TRANSFORMACIONES LINEALES

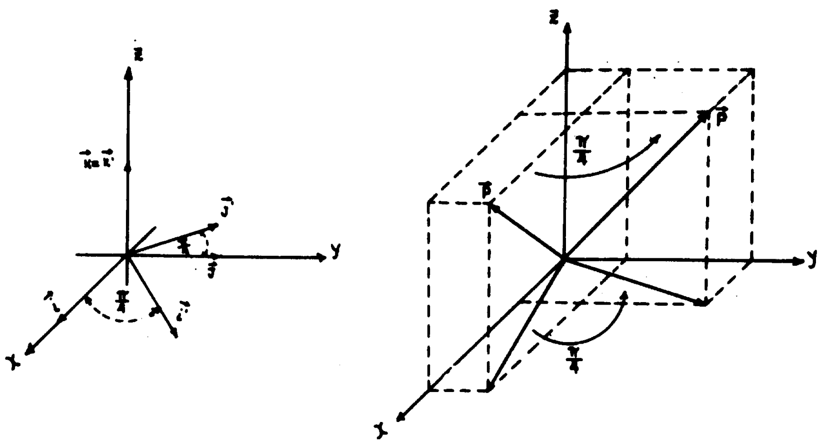
1. Vamos a ver las fórmulas de transformación de coordenadas para la rotación del espacio alrededor del eje Z por un ángulo $\frac{\pi}{4}$.

   Para encontrar las fórmulas, hallemos las imágenes de **i**, **j** y **k** por esta rotación. La imagen de **i** es un vector unitario contenido en el plano XY, que forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje X, y la imagen de **j** también es un vector unitario contenido en el plano XY, y forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje Y. Concluimos que el efecto de la rotación alrededor de Z sobre los vectores **i** y **j** del espacio es el mismo que el de la rotación del plano alrededor del origen sobre los vectores **i** y **j** del plano. Entonces las imágenes de **i** y **j** son

$$\begin{aligned}\mathbf{i}' &= \cos\frac{\pi}{4}\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\mathbf{j}\\ \mathbf{j}' &= -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\mathbf{i} + \cos\frac{\pi}{4}\mathbf{j}\end{aligned}$$

Para hallar la imagen de **k**, observemos que la rotación alrededor de Z no cambia ningún punto que esté sobre este eje. Entonces

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}.$$



Como ya sabemos que las rotaciones son transformaciones lineales podemos usar las imágenes de **i, j** y **k** para hallar la imagen de cualquier vector. Tomemos $\mathbf{P}(x, y, z)$. Entonces sabemos que su imagen es

$$\mathbf{P}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}.$$

Entonces

$$\mathbf{P}' = x\left(\cos\frac{\pi}{4}\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\,\mathbf{j}\right) + y\left(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\,\mathbf{i} + \cos\frac{\pi}{4}\,\mathbf{j}\right) + z\mathbf{k}$$

y agrupando términos, obtenemos

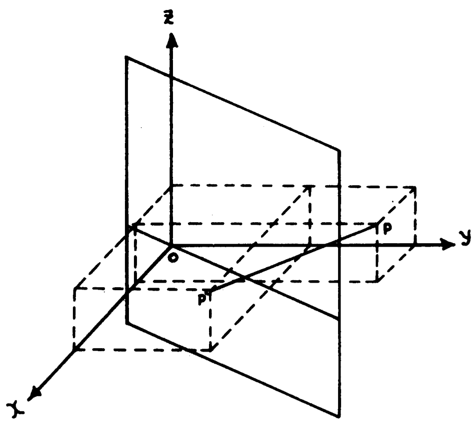
$$\mathbf{P}' = \left(x\cos\frac{\pi}{4} - y\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \left(x\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + y\cos\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

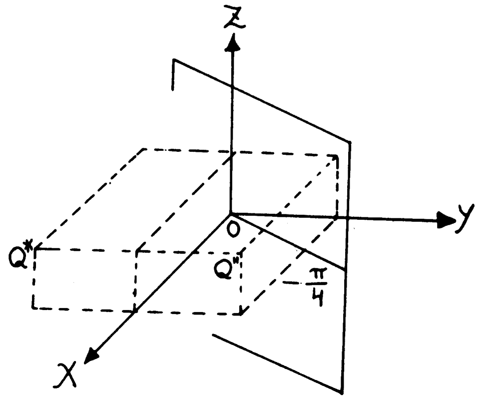
Finalmente las coordenadas de P' están. dadas por las fórmulas

$$\begin{aligned}x' &= x\cos\tfrac{\pi}{4} - y\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4}\\ y' &= x\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} + y\cos\tfrac{\pi}{4}\\ z' &= z.\end{aligned}$$

que son las fórmulas de transformación de coordenadas para la rotación alrededor de Z por el ángulo $\dfrac{\pi}{4}$.

2. Hallemos ahora las fórmulas de transformación de coordenadas para la simetría del espacio respecto al plano $x - y = 0$. Este plano es perpendicular al plano XY, pasa por el origen e intercepta al plano XY en la recta contenida en este plano que forma un ángulo $\frac{\pi}{4}$ con el eje X.





Para hallar las fórmulas de cambio de coordenadas, podríamos proceder de manera similar al ejemplo anterior, hallando las imágenes de los vectores **i**, **j** y **k.** En lugar de hacerlo así, vamos a ver una manera que resulta muy útil en muchos casos. La idea es la siguiente: Tomemos un punto P del espacio y hallemos su imagen P' según la simetría. Observemos que el segmento que une P con P' es perpendicular al plano y que la distancia de P al plano y la del plano a P' son iguales. Apliquemos ahora la rotación del espacio alrededor del eje Z en un ángulo $-\frac{\pi}{4}$. Esta rotación manda el plano $x - y = 0$ en el plano XZ, el punto P a un punto Q'' y el punto P' a un punto Q^*. Lo importante ahora es observar la relación que existe entre Q'' y $Q^* : Q^*$ es la imagen de Q'' por la simetría respecto al plano XZ. Esto es debido a que las rotaciones son movimientos rígidos, y por tanto no cambian ángulos ni distancias. El segmento, que une Q'' y Q^* es perpendicular al plano XZ (no cambia ángulos) y la distancia de Q'' al plano XZ y del plano XZ a Q^* es la misma (no cambian distancias). Si ahora aplicamos la rotación alrededor

del eje Z, pero por un ángulo $\dfrac{\pi}{4}$, obtenemos nuevamente la situación original: el punto Q^* va a dar al punto P', Q'' a P y el plano XZ al plano $x-y=0$.
Lo anterior justifica la siguiente afirmación: el efecto de la simetría respecto al plano $x-y=0$ es el mismo que el efecto de aplicar la rotación alrededor del eje Z en un ángulo $-\dfrac{\pi}{4}$. luego aplicar la simetría respecto al plano XZ y finalmente rotar alrededor del eje Z en un ángulo $\dfrac{\pi}{4}$. Lo notable de esta manera de proceder, es que descomponemos una transformación de la cual no conocemos las fórmulas de transformación de coordenadas en un producto de transformaciones de las que sí conocemos las fórmulas, o en todo caso, podemos deducirlas más fácilmente. Usándolas encontramos las que necesitamos.

Las fórmulas de cambio de coordenadas que usaremos son:

a)

$$\begin{aligned} x'' &= x\cos\tfrac{\pi}{4} + y\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} \\ y'' &= -x\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} + y\cos\tfrac{\pi}{4} \\ z'' &= z \end{aligned}$$

para la rotación alrededor del eje Z por el ángulo $-\dfrac{\pi}{4}$ (se deducen igual que en el ejemplo anterior, o se cambia $\dfrac{\pi}{4}$ por $-\dfrac{\pi}{4}$ en donde aparece);

b)

$$\begin{aligned} x^* &= x \\ y^* &= -y \\ z^* &= z \end{aligned}$$

para la simetría respecto al plano XZ (se deducen fácilmente)

c)

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\tfrac{\pi}{4} - y\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} \\ y' &= x\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} + y\cos\tfrac{\pi}{4} \\ z' &= z \end{aligned}$$

para la rotación alrededor del eje Z por el ángulo $\dfrac{\pi}{4}$ (son las del ejemplo anterior).
Tomemos un punto $P(x, y, z)$. La rotación por el ángulo $-\dfrac{\pi}{4}$ manda este punto en el punto de coordenadas (x'', y'', z'') según las fórmulas a). Estas serian las coordenadas del punto que antes llamamos Q''.

El punto de coordenadas (x'', y'', z'') debe ser reflejado ahora según el plano XZ. Para lograrlo, sustituimos en las fórmulas b) a x, y, z por x'', y'', z''. Obtenemos:

$$\begin{aligned} x^* &= x'' \\ y^* &= -y'' \\ z^* &= z'' \end{aligned}$$

y dando a x'', y'', z'' sus valores,

$$\begin{aligned} x^* &= x\cos\tfrac{\pi}{4} + y\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} \\ y^* &= -\left(-x\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} + y\cos\tfrac{\pi}{4}\right) = x\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} - y\cos\tfrac{\pi}{4} \\ z^* &= z. \end{aligned}$$

(x^*, y^*, z^*) son las coordenadas del punto que antes llamamos Q^*. Ahora, debemos rotar según el ángulo $\dfrac{\pi}{4}$. Esta rotación manda al punto Q^* en el punto de coordenadas

$$\begin{aligned} x' &= x^*\cos\tfrac{\pi}{4} - y^*\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} \\ y' &= x^*\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} + y^*\cos\tfrac{\pi}{4} \\ z' &= z^* \end{aligned}$$

según las fórmulas c).

Al escribir x^*, y^*, z^* en términos de x, y, z obtenemos

$$\begin{aligned} x' &= \left(x\cos\tfrac{\pi}{4} + y\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4}\right)\cos\tfrac{\pi}{4} - \left(x\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} - y\cos\tfrac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} \\ y' &= \left(x\cos\tfrac{\pi}{4} + y\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} + \left(x\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} - y\cos\tfrac{\pi}{4}\right)\cos\tfrac{\pi}{4} \\ z' &= z \end{aligned}$$

Efectuando todos los productos, sacando factor común, etc., se llega a:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos 2\tfrac{\pi}{4} + y\operatorname{sen} 2\tfrac{\pi}{4} \\ y' &= x\operatorname{sen} 2\tfrac{\pi}{4} - y\cos 2\tfrac{\pi}{4} \\ z' &= z \end{aligned}$$

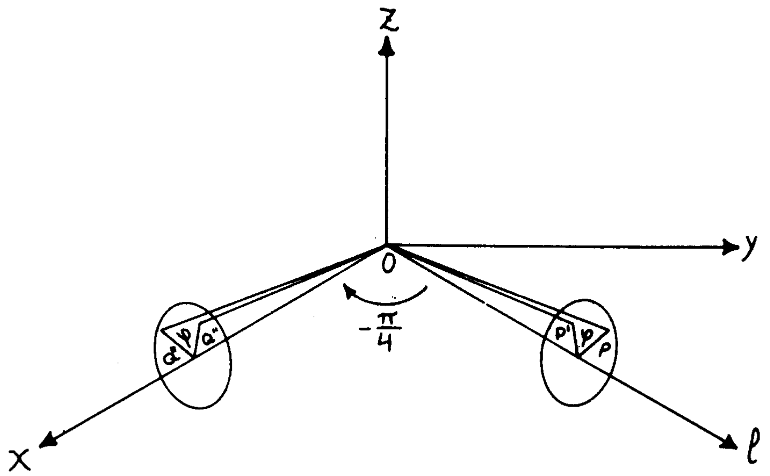
Estas son las coordenadas del punto que antes habíamos llamado P'. Hemos obtenido las fórmulas de transformación de coordenadas para la simetría del espacio respecto al plano $x - y = 0$.

Estas son:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\tfrac{\pi}{2} + y\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\pi}{2} &= y \\ y' &= x\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\pi}{2} - y\cos\tfrac{\pi}{2} &= x \\ z' &= z \end{aligned}$$

Observemos que la coordenada z no cambia, y que las coordenadas x e y se transforman como si el punto estuviera en el plano XY y se reflejara en la recta $x - y = 0$ del plano. Notemos también que en ningún momento hemos usado que esta simetría es una transformación lineal. Como hemos obtenido polinomios homogéneos de primer grado, y el determinante es distinto de cero (¿por qué?), esta simetría es una transformación lineal.

3. Veamos ahora cómo pueden encontrarse las fórmulas de transformación de coordenadas para la *rotación del espacio* alrededor de la recta que pasa por el origen en la dirección del vector $(1, 1, 0)$, en un ángulo φ. Llamemos **L** a esta transformación.



Consideremos un punto P del espacio, y un disco perpendicular a la recta ℓ, colocado de tal forma que su centro está en la recta, y supongámoslo suficientemente grande de manera que el punto P esté en el disco. Hagamos ahora en el disco una marca en el lugar donde está P. Si rotamos el disco un ángulo φ alrededor de su centro, la marca quedará en el lugar donde cae la imagen P' de P por la transformación lineal **L**

Consideremos ahora el punto P, el disco sin rotar y la marca, y apliquemos la rotación alrededor del eje Z por el ángulo $-\dfrac{\pi}{4}$. La imagen, según esta rotación, de la recta ℓ es el eje X, la del disco es un disco perpendicular al eje X y la del punto P un punto Q'' en el disco nuevo, que tiene la marca en el lugar donde está Q''.

Si ahora rotamos este disco en un ángulo φ, la marca indicará un punto Q^* en el espacio. Apliquemos ahora la rotación alrededor del eje Z por el ángulo $\frac{\pi}{4}$. Esta rotación manda al eje X en la recta ℓ, el punto Q'' en el punto P del disco viejo y el punto Q^* en el punto P', que es la imagen de P por la rotación **L**. En conclusión, el efecto de rotar $-\frac{\pi}{4}$ radianes alrededor de Z, después rotar alrededor del eje X por el ángulo φ, y finalmente rotar $\frac{\pi}{4}$ alrededor de Z es el mismo que el efecto de rotar por el ángulo φ alrededor de la recta ℓ.

Hemos descompuesto ("factorizado") la rotación **L** en tres rotaciones: dos alrededor del eje Z y una alrededor del eje X. Como ya conocemos las fórmulas de dos de las tres rotaciones, y la tercera es fácil de encontrar, tenemos el problema casi resuelto.

Las fórmulas para la rotación en un ángulo φ alrededor del eje X son:

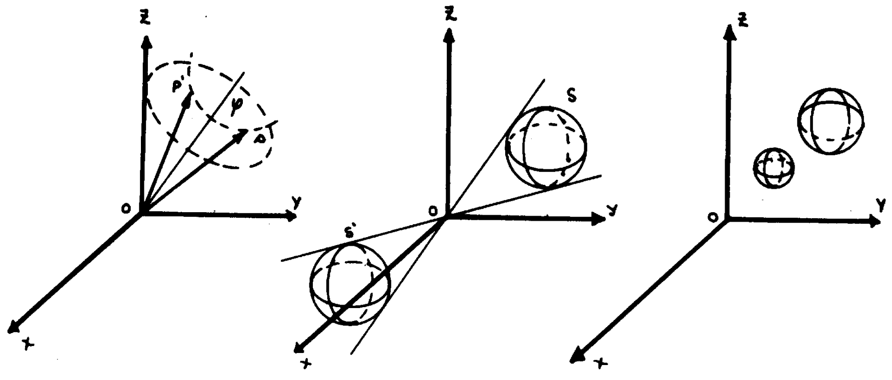
$$\begin{aligned}
x^* &= x \\
y^* &= y\cos\varphi - z\operatorname{sen}\varphi \\
z^* &= y\operatorname{sen}\varphi + z\cos\varphi
\end{aligned}$$

Y las otras dos que necesitamos son las marcadas con a) y c) en el ejemplo anterior. Haga usted el proceso de sustitución. Debe obtener las fórmulas

$$\begin{aligned}
x' &= x\left[\cos^2\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4}\cdot\cos\,\varphi\right] + y\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\,\varphi\right] + z\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \\
y' &= x\left[\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\cos\,\varphi\right] + y\left[\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4}\cdot\cos\,\varphi\right] - z\operatorname{sen}\varphi\cos\frac{\pi}{4} \\
z' &= -x\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\varphi + y\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\varphi + z\cos\,\varphi
\end{aligned}$$

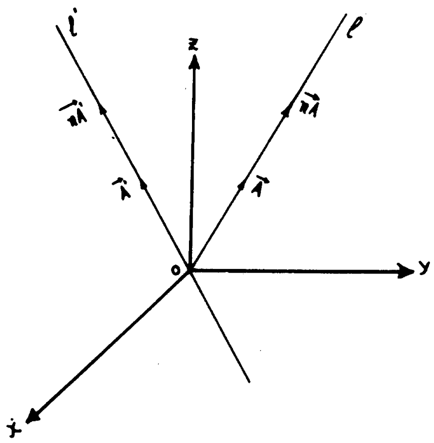
que aunque parecen difíciles, se obtienen con sólo sustituir adecuadamente unas fórmulas en otras. Hemos encontrado las fórmulas para transformación de coordenadas de la rotación sin usar que ésta es lineal. Entonces todo el proceso demuestra que esta rotación es una transformación lineal, ya que las fórmulas son polinomios homogéneos de primer grado, y el determinante es distinto de cero (el determinante debe dar 1).

4. En general, todas las rotaciones alrededor de ejes que pasen por el origen son transformaciones lineales. Y también todas las simetrías respecto al origen y a rectas o planos que pasen por el origen son transformaciones lineales, así como las homotecias de centro O.



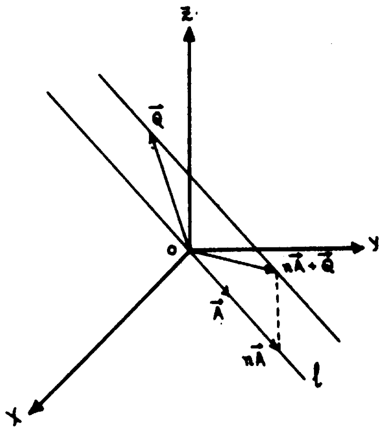
Rotación Simetría Homotecia

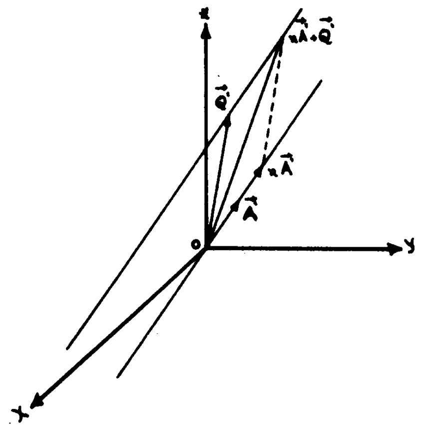
Veamos ahora cómo se transforman algunos subconjuntos del espacio por transformaciones lineales. Comencemos hallando las imágenes de rectas.



Supongamos primero que la recta l pasa por el origen. Sabemos que podemos describir la recta l como el conjunto de puntos de la forma λ**A,** donde λ es un número real variable y **A** un vector fijo no nulo tal que su extremo está en la recta. La imagen de l es entonces el conjunto formado por todos los vectores $(\lambda\,\mathbf{A})'$. Como la transformación es lineal, $(\lambda\,\mathbf{A})' = \lambda\,\mathbf{A}'$, y por tanto la imagen de l es el conjunto de vectores de la forma $\lambda\,\mathbf{A}'$. Pero esto representa la recta que pasa por el origen en la dirección de $\mathbf{A}'$: la imagen por una transformación lineal de la recta que pasa por el origen en la dirección de **A** es la recta que pasa por el origen en la dirección de $\mathbf{A}'$, la imagen de **A** por esa transformación lineal.

Supongamos ahora dada una recta r que no pasa por el origen y sea l la recta que pasa por el origen, paralela a r. Tomemos un vector **A** en l y un vector **Q** en r.



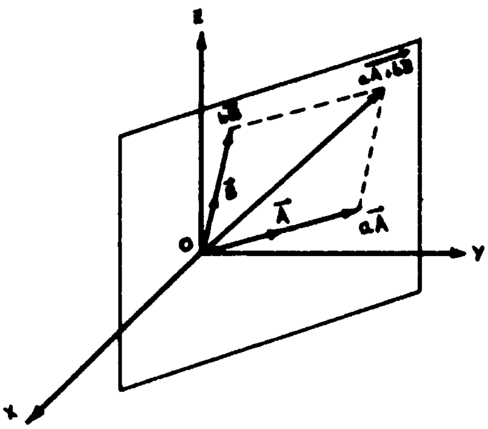


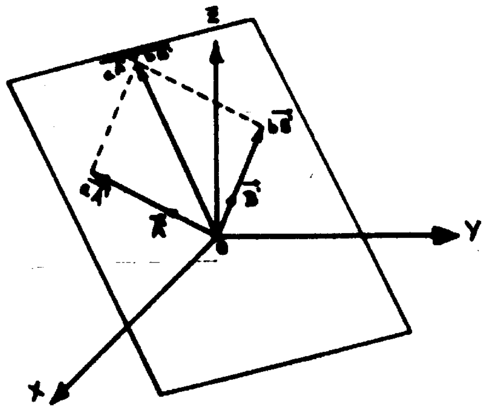
Cada vector en la recta r es de la forma $\mathbf{Q} + \lambda\,\mathbf{A}$. La transformación lineal manda estos vectores en los vectores $(\mathbf{Q} + \lambda\,\mathbf{A})'$, y por las. propiedades de las transformaciones lineales,

$$(\mathbf{Q} + \lambda\,\mathbf{A})' = \mathbf{Q}' + \lambda\,\mathbf{A}'.$$

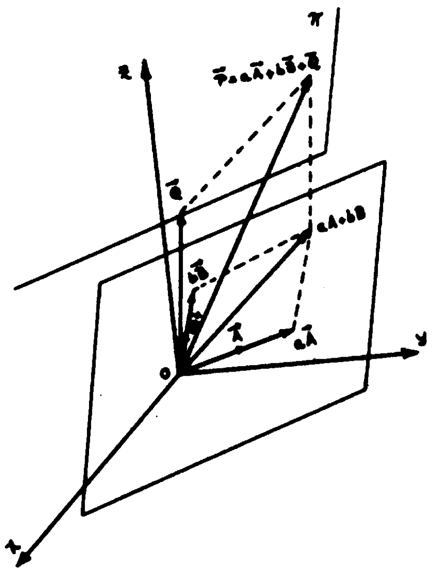
Como $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{A}$ están fijos, $\mathbf{Q}'$ y $\mathbf{A}'$ están fijos y al variar el número λ, se obtiene la recta paralela a A' que pasa por el punto Q'.

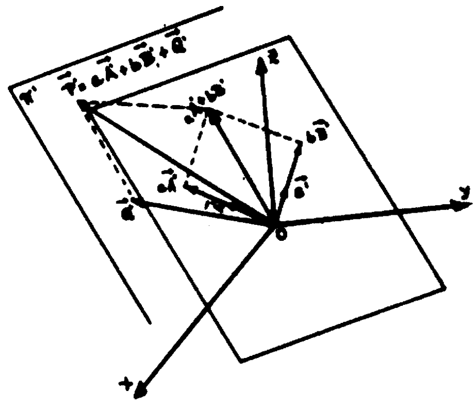
Concluimos que la imagen de una recta según una transformación lineal es una recta





Veamos ahora la imagen de un plano. Supongamos primero que el plano π pasa por el origen. Fijamos dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ en el plano, no colineales. Sabemos que cualquier punto de π lo podemos obtener sumando vectores paralelos a $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, esto es, todo punto de π es de la forma $a\mathbf{A} + b\,\mathbf{B}$, con a y b números reales. La transformación lineal manda los vectores $a\mathbf{A} + b\mathbf{B}$ en los vectores $a\mathbf{A}' + b\mathbf{B}'$ donde $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{B}'$ son las imágenes de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ respectivamente. Pero el conjunto de todos los vectores de la forma $a\mathbf{A}' + b\mathbf{B}'$ es un plano, precisamente el plano que pasa por el origen y los vectores $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{B}'$. Entonces la imagen por una transformación lineal de un plano que pasa por el origen es un plano que pasa por el origen.





Supongamos ahora que el plano π no pasa por el origen. Sea $\mathbf{P}$ un punto en π. Sabemos que $\mathbf{P} = a\,\mathbf{A} + b\,\mathbf{B} + \mathbf{Q}$ donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son vectores no colineales que están en el plano paralelo a π que pasa por el origen, y $\mathbf{Q}$ es un vector en el plano π. La imagen de $\mathbf{P}$ por la transformación lineal es

$$P' = a\mathbf{A}' + b\mathbf{B}' + \mathbf{Q}',$$

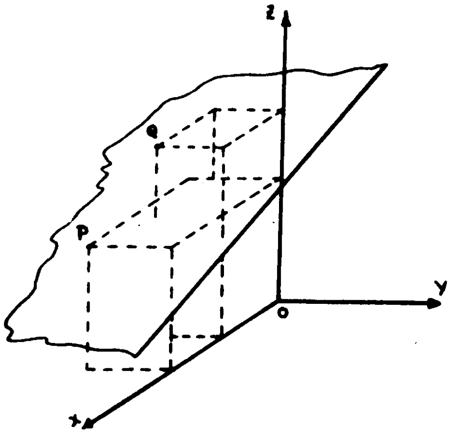
donde $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$ y $\mathbf{Q}'$ son las imágenes de $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{Q}$ respectivamente. Obtenemos que $\mathbf{P}'$ está en el plano que pasa por los puntos $\mathbf{A}' + \mathbf{Q}'$, $\mathbf{B}' + \mathbf{Q}'$ y $\mathbf{Q}'$.

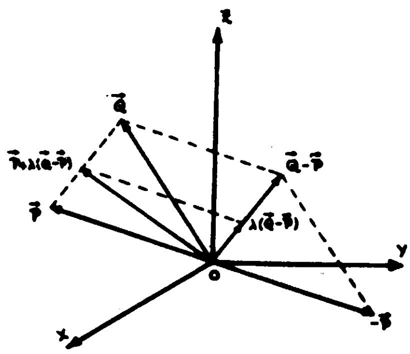
En conclusión, la imagen de un plano según una transformación lineal es un plano.

Observación: Las demostraciones que hemos dado sirven también para hallar las ecuaciones de las imágenes de rectas y planos (¿por qué?).

* * *

Veremos ahora que la imagen de un poliedro convexo es un poliedro convexo. Un resultado que usaremos es que la imagen de un semiespacio es un semiespacio. Veamos por qué. Sabemos que un semiespacio es toda la región del espacio que está a un lado de un plano, junto con el plano mismo. Sea M un semiespacio y π el plano que lo limita. Lo que probaremos es que la imagen M' de M por una transformación lineal es un semiespacio limitado por la imagen π' del plano π. Tomemos dos puntos $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ en M tales que ninguno está en π, y consideremos el segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$ que une $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$. Observando la figura puede verse rápidamente que los puntos del segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$ son de la forma $\mathbf{P} + \lambda(\mathbf{Q} - \mathbf{P})$, con $O \leq \lambda \leq 1$; notamos que cuando $\lambda = 0$ se obtiene $\mathbf{P}$, cuando $\lambda = 1$, se obtiene $\mathbf{Q}$, y que si λ es un número intermedio, se obtienen puntos intermedios del segmento





Observemos que el segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$ está del mismo lado de π que los puntos $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ y que como ellos no están en π, ningún punto de $\overline{\mathbf{PQ}}$ está en π.

Sea ahora $\mathbf{P}'$ y $\mathbf{Q}'$ las imágenes de $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ por la transformación lineal. La imagen del segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$ es el conjunto de puntos de la forma $(\mathbf{P}+\lambda(\mathbf{Q}-\mathbf{P}))'$, con $0 \leq \lambda \leq 1$ Como la transformación es lineal.

$$(\mathbf{P}+\lambda(\mathbf{Q}-\mathbf{P}))' = \mathbf{P}' + \lambda(\mathbf{Q}'-\mathbf{P}').$$

Observe que como $0 \leq \lambda \leq 1$, el conjunto de puntos de la forma $\mathbf{P}' + \lambda(\mathbf{Q}-\mathbf{P}')$ es un segmento de recta, precisamente el segmento de extremos $\mathbf{P}'$ y $\mathbf{Q}'$: la imagen de $\overline{\mathbf{PQ}}$ es $\overline{\mathbf{P}'\mathbf{Q}'}$.

Supongamos que $\mathbf{P}'$ y $\mathbf{Q}'$ están en lados opuestos al plano π'. Entonces el segmento $\mathbf{P}'\mathbf{Q}'$ atraviesa el plano π', y por lo tanto, existe un número λ_0 entre 0 y 1 tal que $\mathbf{P}' + \lambda_0(\mathbf{Q}'-\mathbf{P}')$ está en el plano π'. Como $\mathbf{P}' + \lambda_0(\mathbf{Q}'-\mathbf{P}')$ está en el plano π', él es imagen de un punto en el plano π, precisamente el punto $\mathbf{P} + \lambda_0(\mathbf{Q}-\mathbf{P})$ porque la transformación lineal es biyectiva. Hemos encontrado que si $\mathbf{P}'$ y $\mathbf{Q}'$ están en lados opuestos de π', entonces el segmento $\overline{\mathbf{PQ}}$ tiene un punto en común con el plano π. Esto contradice el hecho de que $\overline{\mathbf{PQ}}$ no toca al plano π: no podemos suponer que $\mathbf{P}'$ y $\mathbf{Q}'$ están en lados opuestos del plano π'. Entonces están ambos a un mismo lado del plano π', y con esto hemos demostrado que todo punto en M tiene por imagen un punto que está del mismo lado de π' que $\mathbf{P}'$, la imagen de $\mathbf{P}$: la imagen de M está contenida en un semiespacio limitado por π'.

Para ver que en realidad es todo el semiespacio, tomemos un punto arbitrario en él, llamémoslo $\mathbf{R}'$. Notemos que $\mathbf{R}'$ está del mismo lado de π' que $\mathbf{P}'$, ya que $\mathbf{R}'$ es la imagen por la transformación lineal de cierto punto $\mathbf{R}$ (sobreyectividad). Consideremos el segmento de recta $\mathbf{P}+\lambda(\mathbf{R}-\mathbf{P})$ con $0 \leq \lambda \leq 1$. Si $\mathbf{R}$ no estuviera al mismo lado de π que $\mathbf{P}$, es decir, si $\mathbf{R}$ no estuviera en el semiespacio M, entonces el segmento $\overline{\mathbf{PR}}$ atravesaría el plano π, y habría un λ_1, entre 0 y 1 tal que $\mathbf{P}+\lambda_1(\mathbf{R}-\mathbf{P})$ estaría en el plano π.

La imagen del segmento $\overline{\mathbf{PR}}$ es el conjunto de todos los puntos de la forma $\mathbf{P}' + \lambda_1(\mathbf{R}' - \mathbf{P}')$ con $0 \leq \lambda \leq 1$. Este conjunto es el segmento $\overline{\mathbf{P}'\mathbf{R}'}$. Si $\mathbf{P} + \lambda_1(\mathbf{R} - \mathbf{P})$ estuviera en el plano π, $\mathbf{P}' + \lambda_1(\mathbf{R}' - \mathbf{P}')$ estaría en el plano π'. Pero esto contradice el hecho de que $\mathbf{R}'$ y $\mathbf{P}'$ están ambos a un mismo lado de π'. Entonces $\mathbf{R}$ debe estar al mismo lado de π que $\mathbf{P}$, y por tanto $\mathbf{R}$ está en M; la imagen de M' del semiespacio M es un semiespacio.

Ahora veremos que la imagen de un poliedro convexo es un poliedro convexo. Sabemos que todo poliedro convexo es la intersección de semiespacios. Tomemos un poliedro convexo, y sea $M_1, M_2, \ldots M_k$ los semiespacios cuya intersección forma el poliedro. Lo que queremos encontrar es la imagen de $M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \ldots \cap M_k$. Como la transformación lineal es inyectiva (porque es biyectiva), la imagen de la intersección es la intersección de las imágenes, y por tanto

$$(M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_k)' = M_1' \cap M_2' \cap \ldots \cap M_k'$$

Esto último es una intersección de semiespacios, es decir, un poliedro convexo: la imagen de un poliedro convexo es otro poliedro convexo.

* * *

Para terminar, vamos a probar que las transformaciones lineales forman un grupo.

Para ver este hecho tenemos que probar que el producto de dos transformaciones lineales es una transformación lineal, y que la inversa de una transformación lineal es otra transformación lineal.

Tomemos dos transformaciones lineales $\mathbf{F}$ y $\mathbf{T}$. Como ambas son biyectivas, su producto $\mathbf{FT}$ es biyectiva. Además, si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son vectores, se tiene que

$$\mathbf{T}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{T}(\mathbf{A}) + \mathbf{T}(\mathbf{B})$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\mathbf{FT}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \mathbf{F}(\mathbf{T}(\mathbf{A} + \mathbf{B})) \\
&= \mathbf{F}(\mathbf{T}(\mathbf{A}) + \mathbf{T}(\mathbf{B})) \\
&= \mathbf{F}(\mathbf{T}(\mathbf{A})) + \mathbf{F}(\mathbf{T}(\mathbf{B})) \\
&= \mathbf{FT}(\mathbf{A}) + \mathbf{FT}(\mathbf{B})
\end{aligned}$$

Entonces $\mathbf{FT}$ satisface la propiedad a) de las transformaciones lineales.

Sea ahora r un número real. Se tiene

$$\mathbf{T}(r\mathbf{A}) = r\mathbf{T}(+\mathbf{A})$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{FT}(r\mathbf{A}) &= \mathbf{F}(\mathbf{T}(r\mathbf{A}))\\ &= \mathbf{F}(r\mathbf{T}(\mathbf{A}))\\ &= r\mathbf{F}(\mathbf{T}(\mathbf{A}))\\ &= r\mathbf{FT}(\mathbf{A}).\end{aligned}$$

Esto prueba que $\mathbf{FT}$ satisface la propiedad b). Como $\mathbf{FT}$ satisface todas las propiedades de una transformación lineal, es una transformación lineal.

Veamos ahora que la inversa de una transformación lineal es una transformación lineal. Como $\mathbf{T}$ es biyectiva, $\mathbf{T}$ tiene inversa; $\mathbf{T}^{-1}$ que también es biyectiva. Tomemos dos vectores $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{B}'$. Sabemos que existen dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tales que $\mathbf{T}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}'$. y $\mathbf{T}(\mathbf{B}) = \mathbf{B}'$ y que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son las imágenes de $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{B}'$ por la aplicación $\mathbf{T}^{-1}$ es decir, $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A}') = \mathbf{A}$ y $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{B}') = \mathbf{B}$.

Nos interesa ahora encontrar la imagen de $\mathbf{A}' + \mathbf{B}'$ por $\mathbf{T}^{-1}$. Como $\mathbf{T}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$ porque $\mathbf{T}$ es lineal, no queda alternativa y debe ser $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A}' + \mathbf{B}') = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Como $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A}') + \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{B}')$ obtenemos

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A}' + \mathbf{B}') = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A}') + \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{B}')$$

Entonces $\mathbf{T}$ satisface la propiedad a) de la definición de transformación lineal.

Tomemos ahora un número r. Tenemos $\mathbf{T}(r\mathbf{A}) = r\mathbf{T}(\mathbf{A})$, esto es $\mathbf{T}(r\mathbf{A}) = r\mathbf{A}'$.
Entonces $r\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}(r\mathbf{A}')$, y como $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A}')$, se tiene

$$\mathbf{T}^{-1}(r\mathbf{A}') = r\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A}')$$

que es la propiedad b) de las transformaciones lineales. Entonces la inversa de una transformación lineal es otra transformación lineal.

EJERCICIOS

1. Encontrar las fórmulas de transformación de coordenadas para las transformaciones lineales dadas

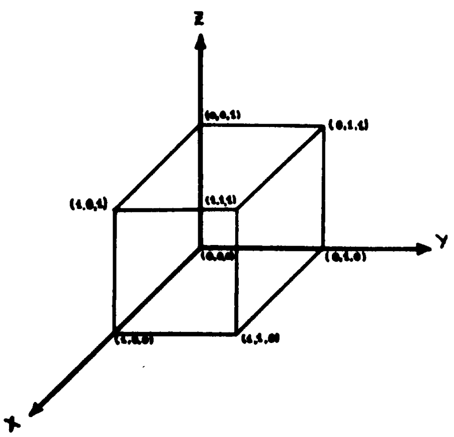
   a) $$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{i}) &= \mathbf{i}+\mathbf{j}\\ \mathbf{T}(\mathbf{j}) &= \mathbf{j}+\mathbf{k}\\ \mathbf{T}(\mathbf{k}) &= \mathbf{i}+\mathbf{k}\end{aligned}$$

   b) $$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{i}) &= \mathbf{k}\\ \mathbf{T}(\mathbf{j}) &= \mathbf{j}\\ \mathbf{T}(\mathbf{k}) &= \mathbf{i}\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{i}) &= \tfrac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{k} \\ \mathbf{T}(\mathbf{j}) &= \tfrac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \mathbf{T}(\mathbf{k}) &= 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{i}) &= -\mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \mathbf{T}(\mathbf{j}) &= \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \mathbf{T}(\mathbf{k}) &= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \end{aligned}$$

2. Asegurarse de que las aplicaciones definidas en el problema 1 son biyectivas encontrando los determinantes.
3. Hallar las fórmulas de transformación de coordenadas para la simetría del espacio respecto al plano $x + y + z = 0$.
4. Hallar la imagen del cubo de vértices en los puntos de coordenadas $(0,0,0), (1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0), (0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$ por cada una de las transformaciones lineales del ejercicio 1.



Observa que este cubo es un poliedro convexo, y por tanto su imagen debe ser un poliedro convexo. Pero aunque el cubo es un poliedro regular, su imagen bajo una transformación lineal puede ser un poliedro convexo que no es regular.

5. Hallar la imagen del eje X bajo la transformación lineal del ejercicio 1 d).
6. Hallar todas las transformaciones lineales que manden los ejes XYZ en las mismas rectas en que los manda la transformación lineal del ejercicio 1. d) ¿Por qué hay infinitas transformaciones lineales que hacen esto?
7. Se tiene una aplicación del espacio en si mismo que transforma las coordenadas de cada punto según las fórmulas

$$x' = y - z; \quad y' = y - z; \quad z' = x + y + z$$

Probar que esta aplicación satisface las propiedades a) y b) de una transformación lineal, pero que no es biyectiva.

8. Hallar la imagen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ bajo cada una de las transformaciones lineales que aparecen en esta guía.
9. Hallar las fórmulas de transformación de coordenadas por una rotación alrededor del eje Y y ángulo arbitrario θ.
10. Si T es una transformación lineal. Supongamos que

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(\mathbf{i}) &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}\\ \mathbf{T}(\mathbf{j}) &= b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}\\ \mathbf{T}(\mathbf{k}) &= c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}\end{aligned}$$

El cuadro de números: $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ se llama la matriz cuadrada de la transformación T

Si X es el vector $\vec{X} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ entonces el producto de la matriz M por el vector x se define como

$$M \cdot \vec{X} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{pmatrix}$$

esta columna está formada por las coordenadas del vector

$$T(\vec{X}) = (a_1x + b_1y + c_1z)\mathbf{i} + (a_2x + b_2y + c_2z)\mathbf{j} + (a_3x + b_3y + c_3z)\mathbf{k}$$

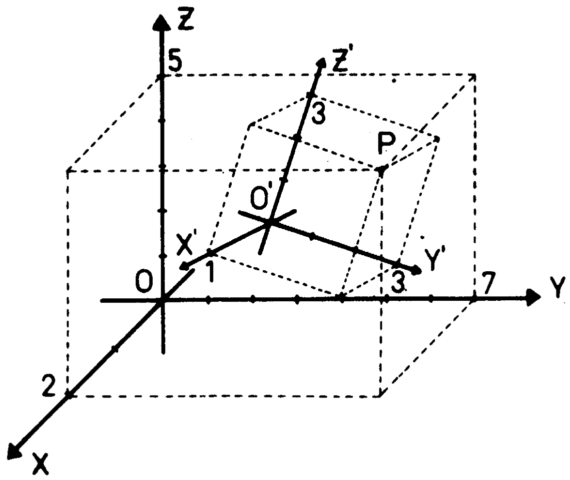
La notación matricial permite escribir rápidamente las ecuaciones de una transformación lineal.

Escriba la matriz de cada una de las transformaciones del ejercicio 1 y de las rotaciones alrededor del eje z.

CAPíTULO 19

TRANSFORMACIONES AFINES

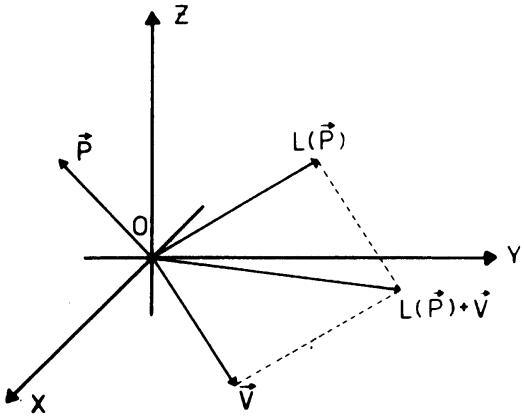
En esta guía veremos una herramienta para resolver situaciones como la siguiente: en el espacio hay dos observadores; ambos observan el mismo fenómeno, digamos que la trayectoria de una partícula, y van tomando nota de las coordenadas en cada momento.



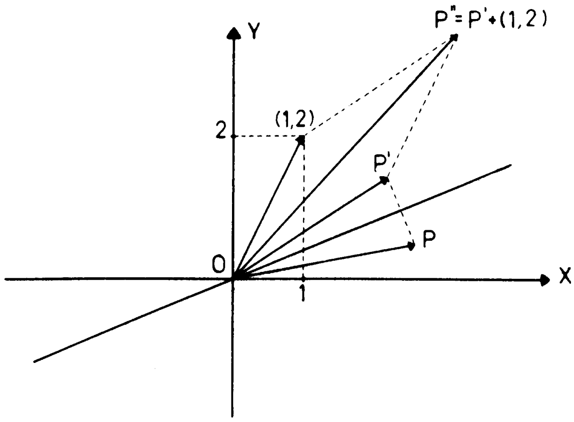
Cada uno ha fijado su propio origen y sus ejes de coordenadas. Entonces, si en determinado momento la partícula está en el punto P del espacio, el observador que fijó su origen en el punto O y los ejes XYZ toma nota de la posición diciendo que la partícula está en el punto de coordenadas $(2, 7, 5)$, mientras que el otro observador, que fijó su origen en el punto O', y los ejes $X'Y'Z'$ anota que la partícula está en el punto de coordenadas $(1, 3, 3)$. El problema se presenta cuando los observadores tratan de comparar sus notas: al mismo punto le asignaron tripletas distintas.

Para resolver este problema se usan las transformaciones afines que estudiaremos en esta guía. La resolución misma del problema quedará para la próxima guía.

Una transformación afín es el producto de una transformación lineal seguida de una traslación. Esto es, si $\mathbf{L}$ es una transformación lineal y $\mathbf{V}$ un vector fijo, la aplicación que manda cada vector $\mathbf{P}$ en el vector $\mathbf{P}'' = \mathbf{L}(\mathbf{P}) + \mathbf{V}$ es una transformación afín.



Ejemplo: consideremos el producto de la simetría del plano respecto a la recta que pasa por el origen formando un ángulo de $\frac{\pi}{8}$ radianes (22,5 grados) respecto al eje X, seguida de la traslación según el vector $(1, 2)$.



Esta transformación afín del plano toma un vector $\mathbf{P} = (x, y)$, lo manda al vector $\mathbf{P}' = (x', y')$ y finalmente lo traslada al vector $\mathbf{P}'' = \mathbf{P}' + (1, 2)$ Como las coordenadas de $\mathbf{P}'$ vienen dadas por las fórmulas

$$\begin{cases} x' &= x\cos\frac{\pi}{4} + y\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \\ y' &= x\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - y\cos\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

y como $\mathbf{P}''$ se obtiene de $\mathbf{P}'$ por traslación según $(1, 2)$, las coordenadas de $\mathbf{P}''$ son:

$$\begin{cases} x'' &= x\cos\frac{\pi}{4} + y\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + 1 \\ y'' &= x\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - y\cos\frac{\pi}{4} + 2. \end{cases}$$

Estas son las fórmulas que dan las coordenadas de la imagen de $\mathbf{P}$.

Nótese que los segundos miembros de estas fórmulas son polinomios de primer grado en las variables x e y, no necesariamente homogéneas, y que se puede reconocer qué parte de las fórmulas corresponden a la transformación lineal, y qué parte a la traslación. Además, notemos que el determinante, formado por los coeficientes de x e y es no nulo.

$$\begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & -\cos\frac{\pi}{4} \end{vmatrix} = -1,$$

Recordemos que esto implica que la simetría es biyectiva de modo que esta transformación afín es biyectiva por ser producto de aplicaciones biyectivas (las traslaciones son biyectivas).

* * *

Veamos otro ejemplo, esta vez en el espacio. Consideremos la simetría del espacio respecto al plano XY seguida de la traslación según el vector $\mathbf{V} = (1, 3, 2)$. La transformación afín definida por estas aplicaciones toma el vector $\mathbf{P} = (x, y, z)$ y lo transforma en el vector $\mathbf{P}'$ de coordenadas

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= -z; \end{cases}$$

finalmente, traslada $\mathbf{P}'$ según $\mathbf{V}$, y se obtiene el vector $\mathbf{P}'' = \mathbf{P}' + \mathbf{V}$ que tiene coordenadas

$$\begin{cases} x'' &= x' + 1 \\ y'' &= y' + 3 \\ z'' &= z' + 2, \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} x'' &= x + 1 \\ y'' &= y + 3 \\ z'' &= -z + 2 : \end{cases}$$

Dadas las coordenadas de un punto P, estas fórmulas dan las coordenadas de su imagen según la transformación afín que hemos definido. Observemos nuevamente que los segundos miembros de estas fórmulas son polinomios de primer grado, y que se reconoce cuál es la parte asociada a la transformación lineal, y cuál al vector de traslación. Además, el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

formado con los coeficientes de x, y, z es no nulo, lo que hace que la simetría sea biyectiva, y por lo tanto la transformación afín también lo es.

* * *

Con los ejemplos que hemos visto podemos imaginar cuál es la forma general de las fórmulas para transformar las coordenadas de un punto según una transformación afín.

Nuestra idea es cierta: en el plano, las fórmulas son del tipo

$$\begin{cases} x'' &= a_1x + b_1y + v_1 \\ y'' &= a_2x + b_2y + v_2, \end{cases}$$

y la única condición que se impone es que el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

deber ser diferente de cero, para que la transformación lineal asociada sea biyectiva. Si esto ocurre (y para nosotros esto forma parte de la definición de la transformación lineal), entonces la transformación afín es biyectiva, por ser producto de aplicaciones biyectivas.

En el espacio ocurre lo mismo. Las fórmulas que dan las coordenadas de la imagen $\mathbf{P}''$ del vector $\mathbf{P} = (x, y, z)$ son de la forma:

$$\begin{cases} x'' &= a_1x + b_1y + c_1z + v_1 \\ y'' &= a_2x + b_2y + c_2z + v_2 \\ z'' &= a_3x + b_3y + c_3z + v_3 \end{cases}$$

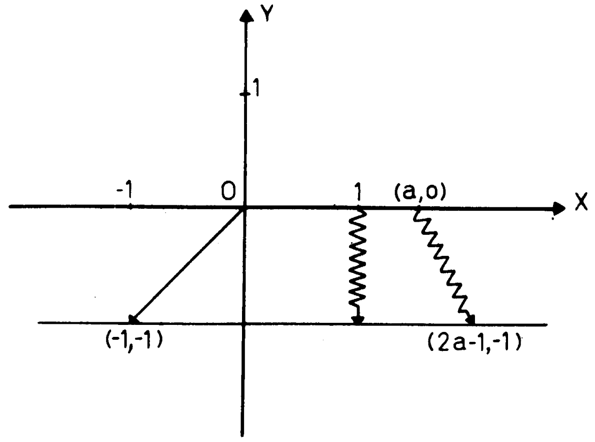
El vector $\mathbf{V}$ de coordenadas (v_1, v_2, v_3) corresponde a la traslación, y el hecho de que la transformación lineal asociada es una aplicación biyectiva impone la única restricción de que los coeficientes de x, y, z satisfagan

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

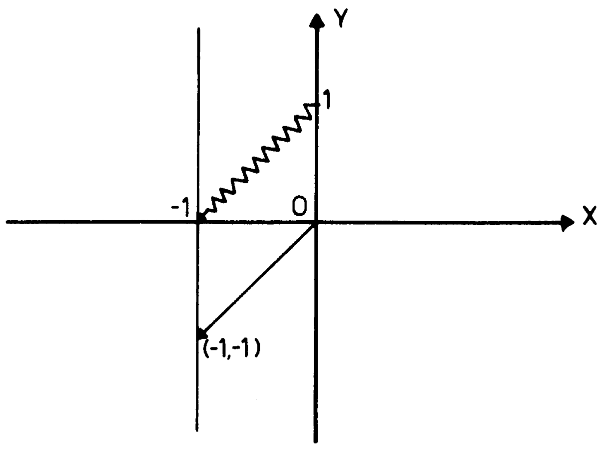
Para entender mejor lo que es una transformación afín, vamos a ver ahora el efecto de estas sobre algunos subconjuntos del plano y del espacio. Tomemos la transformación lineal que manda $\mathbf{i}$ en $2\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ en $\mathbf{j}$, y la traslación según el vector $\mathbf{V} = (-1, -1)$. Ya sabemos que el producto de las dos aplicaciones es la transformación afín que manda el vector $\mathbf{P} = (x, y)$ en el vector de coordenadas

$$\begin{cases} x'' &= 2x - 1 \\ y'' &= y - 1\,. \end{cases}$$

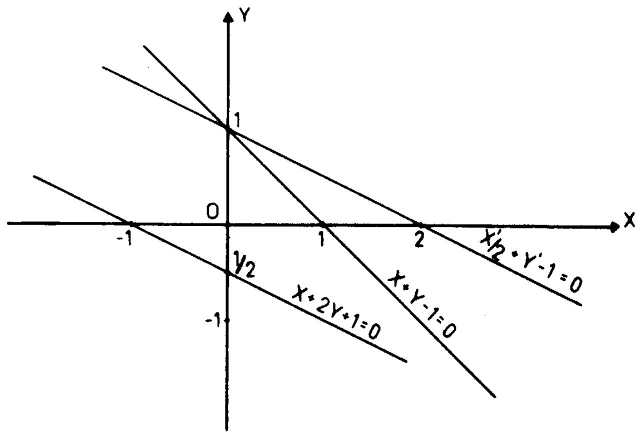
Hallemos la imagen del eje X, por ejemplo. Este está formado por todos los puntos Q de coordenadas $(a, 0)$. La transformación lineal manda este punto en el punto $Q' = (2a, 0)$, y la traslación lo envía al punto $(2a - 1,\ -1)$. Al variar a sobre todos los valores posibles, se obtiene una recta paralela al eje X, que pasa por el punto $(-1,\ -1)$. La razón de que la imagen del eje X sea paralela al eje X es que la imagen de **i** por la transformación lineal es un vector colineal con **i**.



De la misma manera, el eje Y, que está formado por todos los puntos de la forma $(0, b)$, tiene por imagen el conjunto de puntos de coordenadas de la forma $(-1,\ b-1)$. Esto es una recta paralela al eje Y que también pasa por el punto $(-1, -1)$. También aquí, la razón de que la imagen del eje Y sea paralela a ese eje es que la imagen de **j** por la transformación lineal es colineal con **j**.



La imagen de la recta $x + y - 1 = 0$ por esta misma transformación afín podemos hallarla así: su imagen por la transformación lineal es el conjunto de puntos (x', y') que satisfacen $\dfrac{x'}{2} + y' - 1 = 0$, y la traslación manda esta recta en la recta $\dfrac{x'' + 1}{2} + (y'' + 1) - 1 = 0$, es decir, la recta $x + 2y + 1 = 0$.



(Cuando se llega al resultado final, se pueden olvidar las comillas, pues el conjunto representado por ambas ecuaciones, con o sin comillas, es el mismo.)

La imagen según esta transformación afín de la circunferencia $x^2+y^2=r^2$, es la elipse $\dfrac{(x+1)^2}{4}+(y+1)^2=r^2$, porque la transformación lineal manda la circunferencia en $\left(\dfrac{x'}{2}\right)^2+(y')^2=r^2$, y la traslación en $\dfrac{(x''+1)^2}{4}+(y''+1)^2=r^2$.

Veamos ahora cómo se transforman algunos subconjuntos del espacio. Tomemos la transformación lineal que manda **i** en **i** + $\frac{1}{2}$**j**, **j** en $\frac{1}{2}$**i** + **j**, y **k** en **i** + **j** + **k**; y tomemos la traslación según el vector **V** $=(1,2,1)$. El producto de estas aplicaciones define una transformación afín, que manda el vector **P** $=(x,y,z)$ en el vector **P**$''$ cuyas coordenadas vienen dadas por

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'' & = & x+\frac{1}{2}y+z+1 \\ y'' & = & \frac{1}{2}x+y+z+2 \\ z'' & = & z+1. \end{array}\right.$$

Hallemos la imagen del conjunto formado por los tres ejes. Este conjunto está formado por los puntos de coordenadas $(a,0,0),(0,b,0)$ ó $(0,0,c)$; los puntos $(a,0,0)$ son transformados en $(a,\frac{1}{2}a,0)$ por la transformación lineal, y en $(a+1,\frac{1}{2}a+2,1)$ por la traslación. La imagen del eje X es entonces la recta paralela al vector $\left(1,\frac{1}{2},0\right)$, que pasa por el punto $(1,2,1)$. Esta recta podemos llamarla X''.

Un punto de coordenadas $(0,b,0)$ va a dar al punto $\left(\frac{1}{2}b+1,\ b+2,\ 1\right)$. Todos estos puntos forman una recta Y'' paralela al vector $\left(\frac{1}{2},1,0\right)$ que pasa por el punto de coordenadas $(2,\ 2,\ 1)$.

Finalmente los puntos de coordenadas $(0, 0, c)$ tienen por imagen el conjunto de los puntos de coordenadas $(c + 1,\ c + 2\ c + 1)$ Este también es una recta, es paralela al vector $(1, 1, 1)$ y pasa por el punto (1,2,1).

En conclusión, la imagen del conjunto formado por los tres ejes es un conjunto formado por tres rectas X'', Y'' y Z'', que tienen como punto común el punto de coordenadas $(1, 2, 1)$. Las rectas son paralelas a cada una de las imágenes de los vectores **i**, **j** y **k** por la transformación lineal. Trate usted mismo de hacer una representación del espacio, dibujando las rectas.

Con el ejemplo, queda claro que una transformación afín manda rectas en rectas. Con respecto a planos, una transformación lineal manda planos en planos, y como las traslaciones mandan planos en planos, resulta que las transformaciones afines mandan planos en planos.

* * *

Lo que sigue, vale tanto para puntos, vectores y aplicaciones del plano como para puntos, vectores y aplicaciones del espacio, de manera que en lugar de hacerlo dos veces, una vez en el plano y otra en el espacio, el lector puede leer todo hasta al final pensando que los puntos, vectores y aplicaciones están en el plano y luego leerlo nuevamente, pensando esta vez que trabaja en el espacio.

Vamos a analizar un punto importante: las transformaciones afines forman un grupo. Antes de continuar, fijemos la notación. Al decir que **R** es la transformación afín definida por la transformación lineal **L** y la traslación según el vector **V**, estamos diciendo que **R** es la aplicación que manda el vector **P** en el vector $\mathbf{L}(\mathbf{P}) + \mathbf{V}$, de manera que escribimos

$$\mathbf{R}(\mathbf{P}) = \mathbf{L}(\mathbf{P}) + \mathbf{V},$$

como es usual cuando se usa la notación de aplicaciones.
Para comprobar que las transformaciones afines forman un grupo tenemos que probar que el producto de dos transformaciones afines es una transformación afín, y que la inversa de una transformación afín es una transformación afín.

Vamos con la primera de las dos propiedades. Supongamos que **R** es la transformación afín definida por la transformación lineal **L** y la traslación según **V**; y supongamos que **S** es la transformación afín definida por la transformación lineal **F** y la traslación según **W**. Lo que tenemos que demostrar es que el producto de **R** seguido por **S** es una transformación afín. Veamos: si **P** es un vector, su imagen según **R** es el vector

$$\mathbf{R}(\mathbf{P}) = L(\mathbf{P}) + \mathbf{V}$$

Al aplicar a este vector la transformación afín $\mathbf{S}$, obtenemos el vector

$$\mathbf{SR}(\mathbf{P}) = \mathbf{S}(\mathbf{R}(\mathbf{P})) = \mathbf{F}(\mathbf{L}(\mathbf{P}) + \mathbf{V}) + \mathbf{W};$$

como $\mathbf{F}$ es una transformación lineal

$$\mathbf{F}(\mathbf{L}(\mathbf{P}) + \mathbf{V}) = \mathbf{F}(\mathbf{L}(\mathbf{P})) + \mathbf{F}(\mathbf{V});$$

esta es la parte a) de la definición de transformación lineal (Capítulos 17 y 18).

Sustituyendo esta ecuación en la anterior, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{SR}(\mathbf{P}) &= \mathbf{F}(\mathbf{L}(\mathbf{P})) + \mathbf{F}(\mathbf{V}) + \mathbf{W}\\ &= \mathbf{FL}(\mathbf{P}) + [\mathbf{F}(\mathbf{V}) + \mathbf{W}]\end{aligned}$$

Recordemos que si $\mathbf{F}$ y $\mathbf{L}$ son transformaciones lineales, su producto $\mathbf{FL}$ es una transformación lineal. Por otro lado, observaremos que el vector $\mathbf{F}(\mathbf{V}) + \mathbf{W}$ no depende de $\mathbf{P}$. Reuniendo estas observaciones en la ecuación anterior, llegamos a la conclusión de que la aplicación $\mathbf{SR}$ es el producto de la transformación lineal $\mathbf{FL}$ seguida de la traslación según el vector $\mathbf{F}(\mathbf{V}) + \mathbf{W}$, luego $\mathbf{SR}$ es una transformación afín.

Pasemos ahora a demostrar que la inversa de una transformación afín es una transformación afín. Supongamos dada una de éstas, digamos la que llamamos antes $\mathbf{R}$. Como $\mathbf{R}$ es biyectiva, dada $\mathbf{P}''$ existe un único vector $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{R}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}''$. El vector $\mathbf{P}$ es la imagen de $\mathbf{P}''$ bajo $\mathbf{R}^{-1}$.

Veamos cuál es el proceso para hallar $\mathbf{P}$. Sabemos que para encontrar $\mathbf{P}''$ a partir de $\mathbf{P}$, hallamos $\mathbf{L}(\mathbf{P})$ y luego trasladamos. Podemos intentar el proceso inverso, y ver qué resulta. Primero trasladamos $\mathbf{P}''$ según **-V** . Obtenemos

$$\mathbf{P}'' - \mathbf{V}.$$

$$\begin{aligned}\text{Como}\quad \mathbf{P}'' = \mathbf{R}(\mathbf{P}),\;\; \mathbf{P}'' &= \mathbf{L}(\mathbf{P}) + \mathbf{V}, \quad \text{de modo que}\\ \mathbf{P}'' - \mathbf{V} &= [\mathbf{L}(\mathbf{P}) + \mathbf{V}] - \mathbf{V}\\ &= \mathbf{L}(\mathbf{P}).\end{aligned}$$

El siguiente paso es aplicar $\mathbf{L}^{-1}$. Ṡe obtiene $\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{P}'' - \mathbf{V})$; como $\mathbf{P}'' - \mathbf{V} = \mathbf{L}(\mathbf{P})$,

$$\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{P}'' - \mathbf{V}) = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{L}(\mathbf{P}))$$

es decir,

$$\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{P}'' - \mathbf{V}) = \mathbf{P}.$$

Entonces, como se esperaba, el proceso inverso deshace el efecto de $\mathbf{R}$, y por tanto, la aplicación que manda $\mathbf{P}''$ en $\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{P}'' - \mathbf{V})$ es la inversa de $\mathbf{R}$. En lo que sigue, probaremos que esta transformación es afín.

Recordemos que si $\mathbf{L}$ es lineal, entonces $\mathbf{L}^{-1}$ es lineal, y por tanto

$$\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{P}'') - \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{V}) = \mathbf{P}.$$

Observe que hemos usado la propiedad de las transformaciones lineales:

$$\mathbf{L}^{-1}(-\mathbf{V}) = -\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{V}).$$

Esta última igualdad indica que se obtiene el mismo resultado (es decir, $\mathbf{P}$) si $\mathbf{P}''$ se traslada según $-\mathbf{V}$ y luego se le aplica $\mathbf{L}^{-1}$, que si se aplica primero $\mathbf{L}^{-1}$ y luego se traslada según $-\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{V})$: en ambos casos se obtiene $\mathbf{P}$, la imagen de $\mathbf{P}''$ bajo $\mathbf{R}^{-1}$.

Entonces la aplicación que manda $\mathbf{P}''$ en $\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{P}'') - \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{V})$ es también la inversa de $\mathbf{R}(\mathbf{R})$ no tiene dos inversas, sino que la inversa de $\mathbf{R}$ puede escribirse de distintas maneras), porque manda $\mathbf{P}''$ en $\mathbf{P}$. Como la aplicación que manda $\mathbf{P}''$ en $\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{P}'') - \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{V})$ es una transformación afín porque es el producto de la transformación lineal $\mathbf{L}^{-1}$ seguida de la traslación según $-\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{V})$, la inversa de $\mathbf{R}$ es una transformación afín.

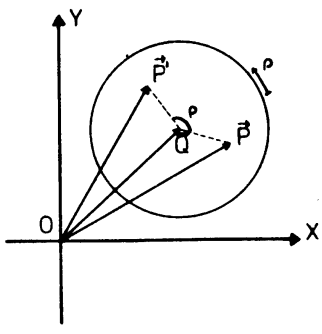
Hemos probado que las transformaciones afines forman un grupo.

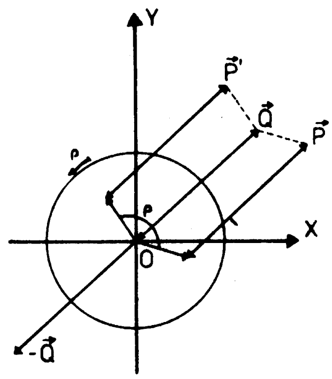
El grupo de las transformaciones afines contiene:

a) El grupo de las transformaciones lineales, porque una transformación lineal puede considerarse como el producto de ella por la traslación según el vector nulo, es decir, la identidad.
b) El grupo de las traslaciones, porque una traslación es el producto de la transformación lineal identidad seguida de esa traslación.
c) Todas las rotaciones, simetrías y homotecias.
d) El grupo de los movimientos rígidos, porque un movimiento rígido es el producto de una rotación y una traslación, o una simetría y una traslación, que son transformaciones afines.
e) El grupo de las semejanzas, porque las semejanzas son productos de homotecias (afines) y movimientos rígidos (también afines).

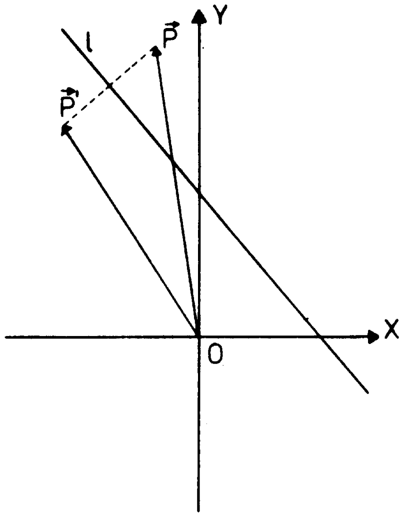
Todas las afirmaciones anteriores deben estar claras, excepto la correspondiente al apartado c). Esta la justificaremos para las rotaciones y simetrías del plano, y quedan como ejercicio los otros casos.

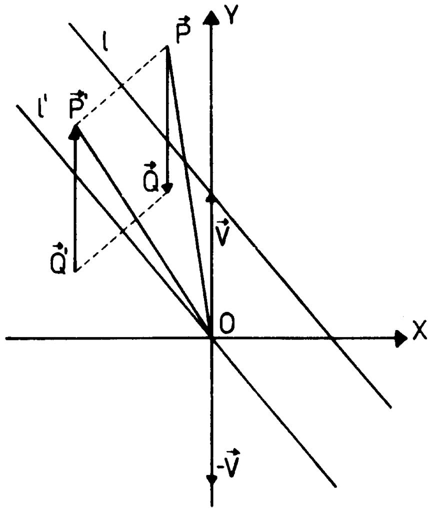
Rotaciones. consideremos la rotación del plano respecto a un punto Q, en un ángulo ρ. Si Q es el origen, la rotación es lineal automáticamente, entonces, por a) es afín. Supongamos entonces que Q no es el origen, y veamos qué pasa. La idea es descomponer esta transformación es un producto de transformaciones afines, y usar el hecho de que estas forman un grupo. La justificación intuitiva de la descomposición es la siguiente: Tomemos un punto P arbitrario, e imaginemos un disco con centro en O y radio suficientemente grande para que P caiga dentro de él. Marquemos el punto P en el disco. La imagen de P por la rotación es el punto del plano donde cae la marca si se rota el disco alrededor de su centro en un ángulo ρ. El mismo efecto se logra si en lugar de rotar el disco, uno lo traslada primero hasta que su centro coincide con el origen, luego lo rota un ángulo ρ alrededor de su centro que ahora coincide con el origen, y después lo traslada hasta que su centro coincide con el punto Q : El punto donde cae la marca ahora es el mismo de antes. Hemos logrado el efecto de la rotación haciendo una traslación, luego una rotación alrededor del origen y luego otra traslación. Observa que las traslaciones y la rotación no dependen del punto P que se tome. La primera traslación manda Q en el origen y por tanto tiene que ser la traslación según **-Q.** La rotación, como es alrededor del origen, es una transformación lineal, y la siguiente traslación manda el origen en el punto Q nuevamente, y por tanto es la traslación según el vector **Q**. Estas tres transformaciones son afines, y por tanto su producto es afín. Como su efecto sobre los puntos del plano es el mismo que el de rotar el plano alrededor del punto Q, ese producto es precisamente la rotación que queríamos descomponer. En conclusión, cualquier rotación del plano puede descomponerse como producto de transformaciones afines y por tanto las rotaciones del plano son transformaciones afines, cualquiera que sea el centro de rotación.





Simetría del plano: consideremos una recta l y la simetría respecto a esta recta. Si l pasa por el origen, la simetría es una transformación lineal y por tanto es afín. Supongamos entonces que l no pasa por el origen. Razonando análogamente al caso de la rotación, puede descomponer la simetría en el producto de una traslación del plano según algún vector **V** que lleve la recta l a la recta l' paralela a l que pase por el origen, luego aplicar la simetría según l' y finalmente la traslación inversa, es decir según **-V**.





Cada una de las transformaciones usadas es afín, y por tanto su producto, que es la simetría según l, es una transformación afín.

EJERCICIOS

1. En cada caso, dar las fórmulas de transformación de coordenadas de las transformaciones afines dadas.

   a) El producto de la transformación lineal $\mathbf{T}$ definida por

   $$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{i}) &= 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \\ \mathbf{T}(\mathbf{j}) &= 3\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} \\ \text{y la traslación según } \mathbf{V} &= (1, -2). \end{aligned}$$

   b) El producto de la transformación lineal $\mathbf{T}$ definida por

   $$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{i}) &= \mathbf{i} \\ \mathbf{T}(\mathbf{j}) &= \mathbf{i} + \mathbf{j} \\ \text{y la traslación según } \mathbf{V} &= \left(2, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

   c) En el espacio, el producto de la homotecia de centro O y razón $\frac{1}{4}$ y la simetría respecto al origen, seguida de la traslación según $\mathbf{V} = (1, 3, 7)$.

   d) La simetría del plano respecto a la recta $x + y - 2 = 0$.

   e) La simetría del espacio respecto al plano $y - 1 = 0$.

   f) La homotecia de centro (1,1,1) y razón $\frac{1}{2}$.

g) La rotación alrededor del eje definido por la recta que pasa por $(0,0,1)$ en la dirección $(1,1,0)$.

2. *a*) Hallar una transformación lineal del plano que manda la recta $y=0$ en la recta $2x+y=0$.

   b) Hallar ahora una traslación del plano que manda la recta $2x+y=0$ en la recta $2x+y-4=0$
3. Repetir el ejercicio No. 2 hallando otra transformación lineal y otra traslación.
4. *a*) Hallar una transformación lineal del plano que mande la recta

$$x=0 \text{ en la recta } -\frac{1}{2}x+y=0$$

   b) Hallar una traslación del plano que mande la recta

$$-\frac{1}{2}x+y=0 \text{ en la recta } -\frac{1}{2}x+y+2=0.$$

5. Repetir el problema No. 4, hallando otra transformación lineal y otra traslación.
6. Hallar una transformación lineal del plano que mande la recta $y=0$ en la recta $2x+y=0$ y la recta $x=0$ en la recta $-\frac{1}{2}x+y=0$.
7. Hallar la transformación lineal que hace lo mismo que la transformación lineal del ejercicio No. 6, pero que además mande el punto $(1,1)$ en el punto $(3,-1)$. ¿Por qué hay sólo una transformación lineal que hace esto?
8. ¿Cuál es la transformación afín que manda la recta $y=0$ en la recta $2x+y-4=0$, la recta $x=0$ en la recta $-\frac{1}{2}x+y+2=0$, y el punto $(1,1)$ en el punto $\left(\frac{27}{5},-\frac{9}{5}\right)$?
9. *a*) Hallar una transformación lineal que mande el eje X en la recta que pasa por el origen en la dirección $\left(1,\frac{1}{2},0\right)$, el eje Y en la recta que pasa por el origen en la dirección $\left(\frac{1}{2},1,0\right)$ y el eje Z en la recta que pasa por el origen en la dirección $(1,1,1)$.

   b) Hallar la traslación que manda cada una de las rectas anteriores en la recta paralela respectiva que pasa por $P(1,2,2)$. ¿Por qué hay sólo una traslación que hace esto?
10. Repetir el ejercicio No. 9 a), hallando otra transformación lineal.
11. Repetir el ejercicio No. 9 a), hallando otra transformación línea que manda el punto $(2,2,1)$ en el punto $(7,8,3)$.
12. Hallar la transformación afín que manda el eje X en la recta que pasa por $P(1,2,2)$ en la dirección $(21,1,0)$, el eje Z en la recta que pasa por $P(1,2,2)$ en la dirección $(1,1,1)$ y el punto $(2,2,1)$ en el punto $(9,10,5)$.
13. Notación Matricial.

En el ejercicio 10. del Capítulo 18 se vio que toda transformación lineal T que mide el vector (x, y, z) en el vector x', y', z' se puede escribir en notación matricial así

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{donde}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{Ti} & = & a_1\mathbf{i} & + & a_2\mathbf{j} & + & c_3\mathbf{k} \\ \mathbf{Tj} & = & b_1\mathbf{i} & + & b_2\mathbf{j} & + & c_3\mathbf{k} \\ \mathbf{Tk} & = & c_1\mathbf{i} & + & c_2\mathbf{j} & + & c_3\mathbf{k} \end{array}$$

Entonces toda transformación afin se puede escribir

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Escribir las transformaciones del problema 1. en notación matricial

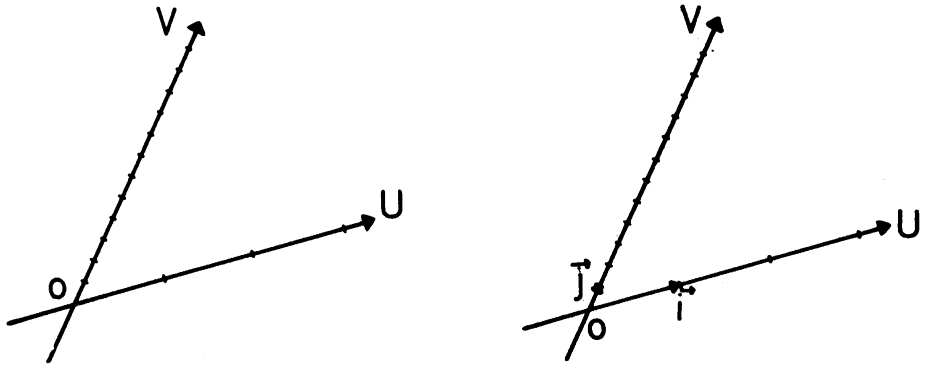
CAPíTULO 20

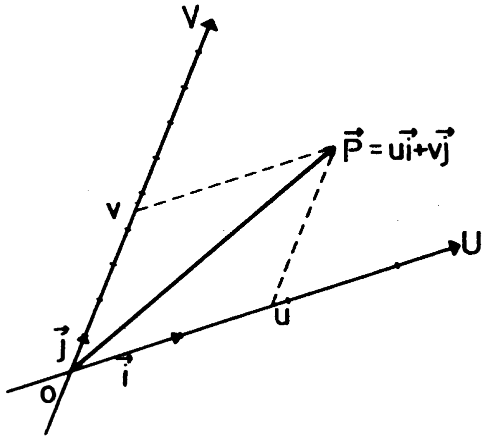
CAMBIOS DE COORDENADAS

En esta guía veremos cómo resolver el siguiente problema: en el plano (o el espacio) se tienen definidos dos sistemas de coordenadas, y se conocen las coordenadas de un punto P respecto a uno de los sistemas; se quieren conocer las coordenadas de P en el otro sistema.

CAMBIOS DE COORDENADAS EN EL PLANO

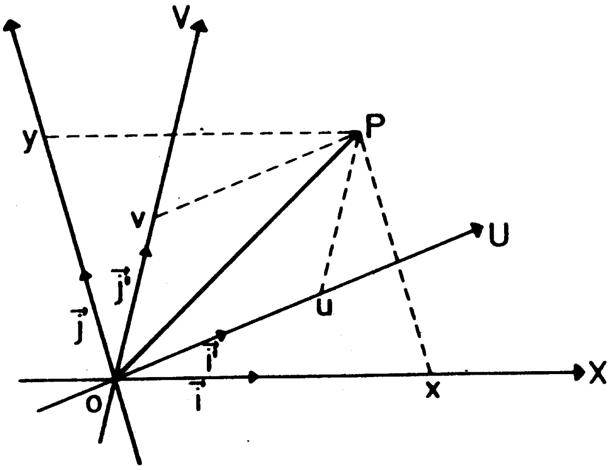
Trabajemos primero en el plano. Recordemos que lo esencial de un sistema de coordenadas en el plano es conocer: un punto O llamado origen, dos rectas llamadas ejes que se cruzan en O y la unidad de medida en cada recta. Las rectas y las unidades de medida en ellas determinan dos vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ que están cada uno sobre una de las rectas, y que tienen longitud 1 en la recta correspondiente. Observa que los ejes no tienen por qué ser perpendiculares. Al punto P se le asocia el par (u, v), donde u y v son los únicos números que tienen la propiedad de que $\mathbf{P} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$.





Comencemos con el cambio de coordenadas más sencillo: tenemos dos sistemas de coordenadas, ambos con el mismo origen.

Supongamos que conocemos las coordenadas (x, y) del punto P.



¿Cuáles son las coordenadas de P en el sistema UV? Para contestar esta pregunta, debemos encontrar la relación que existe entre ambos sistemas: tenemos que saber cómo se relacionan los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ con los vectores $\mathbf{i}'$ y $\mathbf{j}'$. Supongamos entonces que sabemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= a_1\mathbf{i}' + a_2\mathbf{j}' \\ \mathbf{j} &= b_1\mathbf{i}' + b_2\mathbf{j}' \end{aligned}$$

Conocer esta relación forma parte del planteamiento del problema.

Ahora, observemos que las coordenadas de P en el sistema UV, que son las que buscamos, deben satisfacer

$$\mathbf{P} = u\mathbf{i}' + v\mathbf{j}'$$

y que las coordenadas de P en el sistema XY satisfacen

$$\mathbf{P} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

Si en esta ecuación sustituimos **i** y **j**, obtenemos

$$\mathbf{P} = x(a_1\mathbf{i}' + a_2\mathbf{j}') + y(b_1\mathbf{i}' + b_2\mathbf{j}')$$

Observe que en esta ecuación conocemos $x,\ y,\ a_1,\ a_2,\ b_1,$ y b_2. Operando en ella, obtenemos

$$\mathbf{P} = (xa_1 + yb_1)\mathbf{i}' + (xa_2 + yb_2)\mathbf{j}'.$$

Hemos expresado **P** como suma de componentes en $\mathbf{i}'$ y $\mathbf{j}'$. De aquí resulta que

$$\begin{cases} u &= a_1x + b_1y \\ v &= a_2x + b_2y \end{cases}$$

por ser (u, v) el único par de números con la propiedad

$$\mathbf{P} = u\mathbf{i}' + v\mathbf{j}'$$

Una observación muy importante es que aunque las fórmulas resultaron idénticas a las de una transformación lineal del plano, ellas no representan una transformación lineal del plano. La razón está en que el punto de coordenadas (x, y) en el sistema XY es el mismo punto que tiene coordenadas (u, v) en el sistema UV :

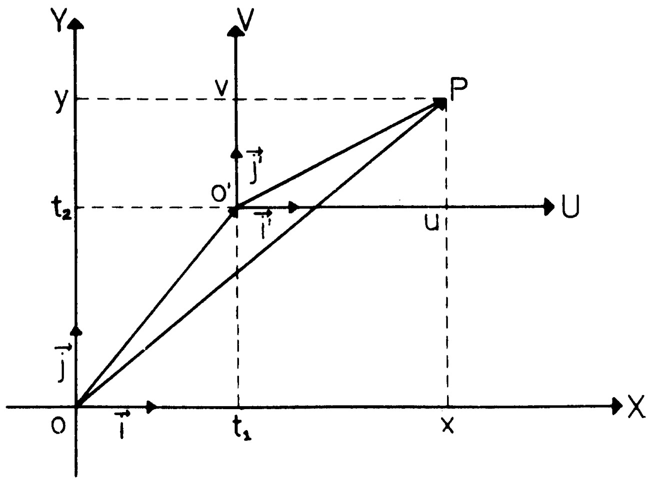
$$\mathbf{P} = x\mathbf{i} + y\mathbf{i} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}'$$

La interpretación de las fórmulas es otra: ellas mandan el par ordenado de números (x, y) en el par ordenado de números (u, v). Esto es una aplicación de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^2$ (no del plano en si mismo) que es biyectiva: dos puntos P y Q distintos corresponden a pares distintos en el sistema XY; al hallar sus coordenadas en el sistema UV debemos obtener pares distintos también, porque estos nuevos pares corresponden a los mismos puntos P y Q, que son distintos. Esto prueba que la aplicación de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^2$ que estamos discutiendo es inyectiva. Probar que es sobreyectiva, lo dejamos para que usted lo piense. Como esa aplicación es biyectiva, el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

debe ser distinto de cero. Probar este hecho es esencialmente repetir la misma prueba para transformaciones lineales del plano, y lo dejamos como ejercicio.

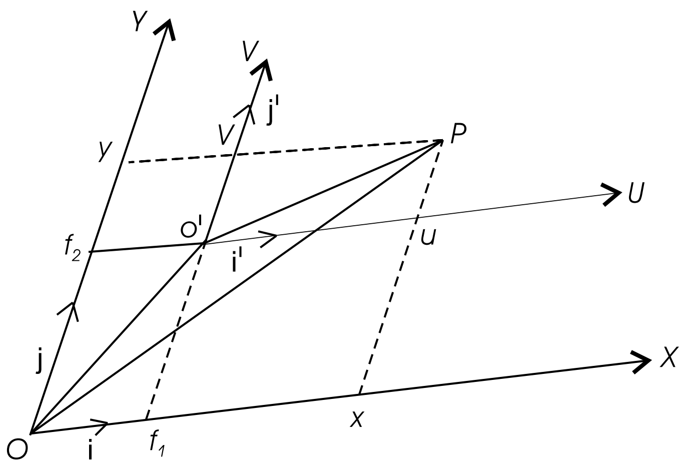
Analicemos un segundo caso de cambio de coordenadas: tenemos ahora dos sistemas de coordenadas de ejes paralelos, orígenes distintos y la misma unidad de medida en cada eje: $\mathbf{i}'$ tiene la misma longitud que $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}'$ la misma que $\mathbf{j}$.



Tomemos un punto P arbitrario, y supongamos que sus coordenadas respecto al sistema XY son (x, y). Queremos hallar u y v, las coordenadas en el sistema UV. Comencemos relacionando los dos sistemas. En este caso, basta con conocer la posición del punto O' en relación al sistema XY : digamos que O' tiene coordenadas (t_1, t_2). Observando el gráfico, vemos que

$$\begin{cases} u &= x - t_1 \\ v &= y - t_2 \end{cases}$$

Con el gráfico siguiente, puedes convencerte de que los ejes no tienen por qué ser perpendiculares para que este resultado sea válido.

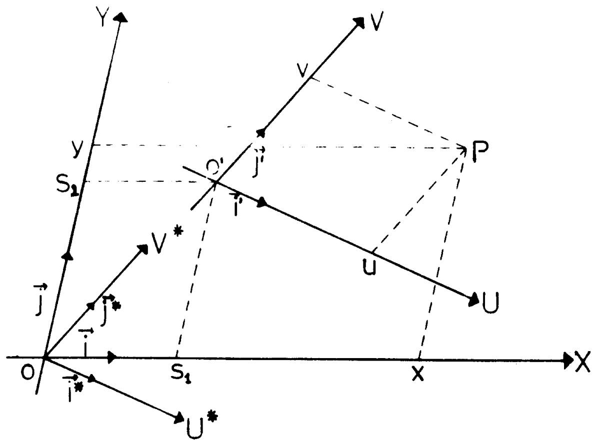


El caso más general para cambio de coordenadas es aquel en el que ni los orígenes coinciden ni se tienen ejes paralelos.

Supongamos que tenemos los sistemas XY y UV, y que los ejes U y V, son las rectas que en el sistema XY están dadas por:

U la recta que pasa por O' en la dirección $\mathbf{i}'$

V la recta que pasa por O' en la dirección $\mathbf{j}'$



Las coordenadas del punto O' en el sistema XY son (s_1, s_2).

Supongamos ahora que tenemos un punto P que en el sistema XY tiene coordenadas (x, y); queremos encontrar sus coordenadas en el sistema UV.

Lo primero que hacemos es fabricar un nuevo sistema U^*V^*, con origen en O y ejes paralelos a los ejes del sistema UV. Esto lo hacemos trazando rectas que pasan por O en las direcciones de $\mathbf{i}^* = \mathbf{i}'$, $\mathbf{j}^* = \mathbf{j}'$. Ahora hallamos las coordenadas de P en este sistema. Si

$$\begin{cases} \mathbf{i} &= a_1\mathbf{i}^* + a_2\mathbf{j}^* \\ \mathbf{j} &= b_1\mathbf{i}^* + b_2\mathbf{j}^*, \end{cases}$$

entonces las coordenadas de P en el sistema U^*V^* son

$$\begin{cases} u^* &= a_1x + b_1y \\ v^* &= a_2x + b_2y \end{cases}$$

Ahora estamos en la situación del segundo caso: dos sistemas de ejes paralelos, con la misma unidad de medida en cada uno. Para usar el resultado que obtuvimos en ese caso, debemos hallar las coordenadas de O' en el sistema U^*V^*. Estas son

$$\begin{cases} t_1 &= a_1s_1 + b_1s_2 \\ t_2 &= a_2s_1 + b_2s_2 \end{cases}$$

Concluimos ahora que las coordenadas de P en el sistema UV son

$$\begin{cases} u &= u^* - t_1 \\ v &= v^* - t_2 \end{cases}$$

es decir, si las coordenadas de P en el sistema XY son (x, y), en el sistema UV son

$$\begin{cases} u &= a_1x + b_1y - t_1 \\ v &= a_2x + b_2y - t_2; \end{cases}$$

t_1 y t_2 no las sustituimos por sus valores en términos de s_1 y s_2, porque el número representado es constante: No depende de x e y sino únicamente del punto O', que está fijo a través de todo el problema.

Nuevamente observamos que las fórmulas que dan u y v en términos de x e y son similares a las de una transformación afín. Pero ellas no representan una transformación del plano puesto que el punto P no se cambia en ninguna parte. Las fórmulas representan una aplicación de $\mathbf{R^2}$ en $\mathbf{R^2}$, que manda el par de números (x, y) (no el punto de coordenadas (x, y)) en el par (u, v). Aplicaciones de $\mathbf{R^2}$ en $\mathbf{R^2}$ como la que obtuvimos se llaman transformaciones afines de $\mathbf{R^2}$

Veamos algunos ejemplos de cambio de coordenadas. El sistema XY es un sistema de ejes perpendiculares con origen en un punto O, y supongamos la misma unidad de medida en cada eje. El sistema UV está dado por las rectas siguientes: el eje U es la recta que pasa por el punto O' que en el sistema XY tiene coordenadas $(1, 3)$, paralela a $\mathbf{i}^* = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$; el eje V pasa por O' y es paralelo a $\mathbf{j}^* = \frac{1}{2}\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, la unidad de medida en U será la longitud de $\mathbf{i}^*$ y la de V, la longitud de $\mathbf{j}^*$.

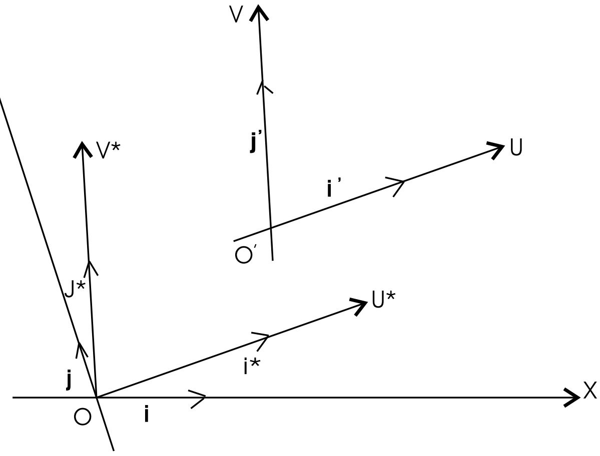
Se tiene un punto P de coordenadas (x, y) en el sistema XY. Vamos a encontrar sus coordenadas en el sistema UV.

Lo primero que hacemos es encontrar sus coordenadas en un sistema U^*V^* paralelo a UV, con origen O. Para encontrarlas, debemos conocer $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ en términos de $\mathbf{i}^*$ y $\mathbf{j}^*$. Sabemos que

$$\begin{cases} \mathbf{i}^* &= 2\mathbf{i} + \mathbf{j} \\ \mathbf{j}^* &= \frac{1}{2}\mathbf{i} + 3\mathbf{j}; \end{cases}$$

entonces

$$\begin{cases} \mathbf{i} &= \dfrac{6}{11}\mathbf{i}^* - \dfrac{2}{11}\mathbf{j} \\ \mathbf{j} &= -\dfrac{1}{11}\mathbf{i}^* + \dfrac{4}{11}\mathbf{j}^* \end{cases}$$



se sigue que las coordenadas de P en el sistema U^*V^* son

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{6}{11}x - \frac{1}{11}y \\ v^* &= -\frac{2}{11}x + \frac{4}{11}y \end{aligned}$$

y las coordenadas del punto O' en este sistema son:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{6}{11}\cdot 1 - \frac{1}{11}\cdot 3 = \frac{3}{11} \\ t_2 &= -\frac{2}{11}\cdot 1 + \frac{4}{11}\cdot 3 = \frac{10}{11} \end{aligned}$$

Con esto podemos hallar las coordenadas de P en el sistema UV.

(1) $$\begin{cases} u = u^* - t_1 = \dfrac{6}{11}x - \dfrac{1}{11}y - \dfrac{3}{11} \\ v = v^* - t_1 = -\dfrac{2}{11}x + \dfrac{4}{11}y - \dfrac{10}{11} \end{cases}$$

Veamos otro ejemplo con el mismo par de sistemas. Supongamos que nos dan una recta l, que en el sistema XY satisface la ecuación

(2) $$Ax + By + C = 0$$

Queremos encontrar qué ecuación satisface l en el sistema UV. Observa que un punto P está en la recta l si y sólo si sus coordenadas (x, y) en el sistema XY satisfacen la ecuación (2). Entonces P está en la recta l si y sólo si sus coordenadas (u, v) en el sistema UV son tales que provienen (según las fórmulas (1) de cambio de coordenadas) de un par (x, y) que satisface la ecuación (2). Entonces, para saber si un punto P que tiene coordenadas (u, v) en el sistema UV pertenece a la recta l, debemos saber si u y v provienen de un par (x, y) que satisfaga la ecuación (2).

Si un punto tiene coordenadas (u, v) en el sistema UV, él tiene coordenadas (x, y) dadas por las fórmulas

$$\begin{cases} x = 2u + \frac{1}{2}v + 1 \\ y = u + 3v + 3. \end{cases} \tag{3}$$

Estas fórmulas pueden obtenerse de las fórmulas (1) considerando éstas como un sistema de ecuaciones con incógnitas x e y. Para hallar la ecuación que deben satisfacer u y v procedemos así:

Un punto P de coordenadas (x, y) está en la recta l si y sólo si

$$Ax + By + C = 0.$$

Entonces ese punto está en la recta l si y sólo si

$$A\left(2u + \frac{1}{2}v + 1\right) + B(u + 3v + 3) + C = 0.$$

Reagrupando, obtenemos

$$(2A + B)u + \left(\frac{1}{2}A + 3B\right)v + (A + 3B + C) = 0 \tag{4}$$

y la conclusión es: Un punto P está en la recta l si y sólo si sus coordenadas (u, v) en el sistema UV satisfacen la ecuación (4). La ecuación (4) es la ecuación de la recta l en el sistema UV.

Un ejemplo más, con los mismos sistemas de coordenadas.

Se da una circunferencia C, que en el sistema XY tiene como ecuación

$$(x - 1)^2 + y^2 = 4. \tag{5}$$

Se pide encontrar la ecuación que satisface C en el sistema UV.

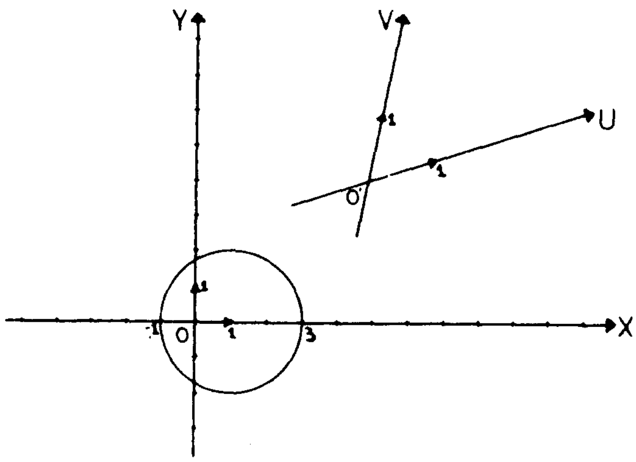
Igual que en el ejemplo anterior, un punto P está en C si y sólo si sus coordenadas (x, y) en el sistema XY satisfacen la ecuación (5). Entonces un punto con coordenadas (u, v) en el sistema UV está en la circunferencia si y sólo si el par (u, v) proviene de un par (x, y) que satisface (5). Se concluye que un punto P de coordenadas (u, v) está en la circunferencia C si y sólo si

$$\left[\left(2u + \frac{1}{2}v + 1\right) - 1\right]^2 + (u + 3v + 3)^2 = 4$$

Observe que para encontrar esta ecuación hemos usado las fórmulas (3). Reagrupando términos, obtenemos

$$5u^2 + \frac{37}{4}v^2 + 8uv + 6u + 18v + 5 = 0. \tag{6}$$

Ésta es la ecuación de la circunferencia C en el sistema UV. Aunque no se parece mucho a la ecuación de la circunferencia que hemos presentado anteriormente, sí lo es: El conjunto de todos los puntos del plano cuyas coordenadas en el sistema UV satisfacen la ecuación (6) forman una circunferencia.



* * *

Aquí vale la pena hacer un paréntesis y discutir en detalle lo que ocurre. Cuando se tiene una ecuación (o un sistema de ecuaciones) que involucren 2 variables, como las ecuaciones (2), (4), (5) y (6), se tiene determinado nada más y nada menos que un subconjunto de R^2. En el momento en que se establece una relación entre R^2 y el plano como la que se obtiene al definir un sistema de coordenadas, se "genera" para cada subconjunto de R^2 un subconjunto del plano que está estrechamente relacionado con la manera de identificar R^2 con el plano. Una misma ecuación puede originar diferentes subconjuntos del plano si se relaciona R^2 con el plano mediante varios sistemas de coordenadas. Por ejemplo al dar la ecuación (5) se obtiene un subconjunto de R^2. Al dar el sistema XY de nuestro ejemplo (que tiene ejes perpendiculares y la misma unidad de medida en cada uno), se obtiene de la ecuación (5) un subconjunto del plano, que en este caso es una circunferencia. Si el sistema XY no tuviera ejes perpendiculares, o si las unidades de medida en cada eje fueran distintas, se obtendría de la ecuación (5) una elipse.

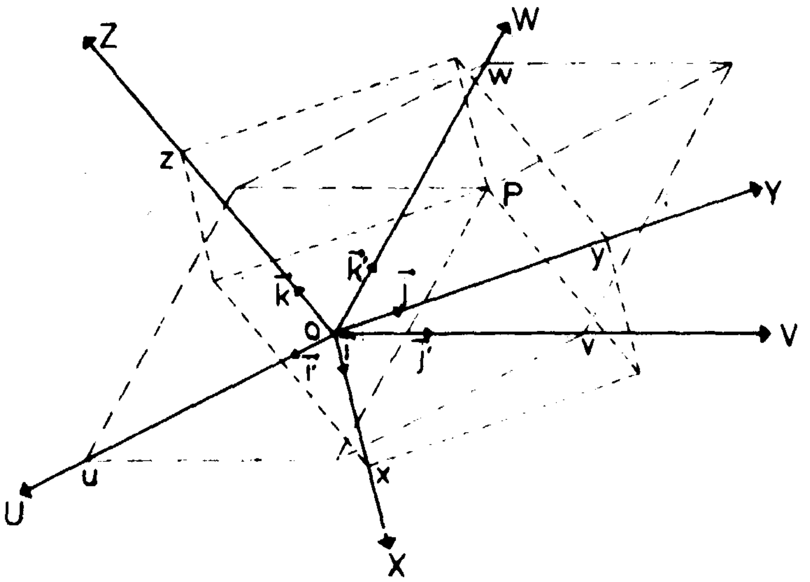
Con la ecuación (6) ocurre lo mismo. Ella define un subconjunto de R^2 que corresponde a una circunferencia en el plano si la identificación de R^2 con el plano se hace mediante el sistema UV, que hemos usado hasta ahora. Si el sistema UV fuera de ejes perpendiculares, por ejemplo, la ecuación (6) representaría una elipse.

* * *

CAMBIOS DE COORDENADAS EN EL ESPACIO

Pasemos ahora a cambios de coordenadas en el espacio. Como el problema es similar al del plano, no entraremos en tanto detalle.

Analicemos primero un caso particular. Tenemos dos sistemas de coordenadas con el mismo origen; el sistema XYZ con vectores unitarios **i**, **j**, **k** y el sistema UVW con vectores unitarios $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ y $\mathbf{k}'$. No suponemos que los ejes del sistema XYZ sean ortogonales entre sí, ni tampoco que **i**, **j** y **k** tengan la misma longitud como segmentos de recta. La misma observación vale para el sistema UVW.



Al relacionar ambos sistemas, obtenemos:

$$\begin{cases} \mathbf{i} &= a_1\mathbf{i}' + a_2\mathbf{j}' + a_3\mathbf{k}' \\ \mathbf{j} &= b_1\mathbf{i}' + b_2\mathbf{j}' + b_3\mathbf{k}' \\ \mathbf{k} &= c_1\mathbf{i}' + c_2\mathbf{j}' + c_3\mathbf{k}' \end{cases}$$

y si $\mathbf{P} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= x(a_1\mathbf{i}' + a_2\mathbf{j}' + a_3\mathbf{k}') + y(b_1\mathbf{i}' + b_2\mathbf{j}' + b_3\mathbf{k}') + z(c_1\mathbf{i}' + c_2\mathbf{j}' + c_3\mathbf{k}') \\ &= (a_1x + b_1y + c_1z)\mathbf{i}' + (a_2x + b_2y + x_2z)\mathbf{j}' + (a_3x + b_3y + c_3z)\mathbf{k}' \end{aligned}$$

Como los números u, v y w que se usan para escribir $\mathbf{P} = u\mathbf{i}' + u\mathbf{j}' + w\mathbf{k}'$ son únicos, se concluye que las coordenadas de **P** en el sistema UVW son

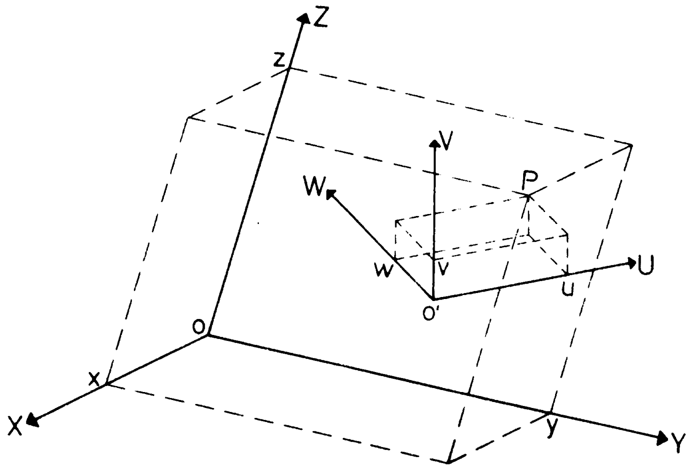
$$\begin{cases} u &= a_1x + b_1y + c_1z \\ u &= a_2x + b_2y + c_2z \\ w &= a_3x + b_3y + c_3z. \end{cases}$$

Observemos nuevamente que las fórmulas de cambio de coordenadas que obtuvimos son similares a las de una transformación lineal. Pero lo único que hacen es dar una representación de un punto P del espacio en términos de otra representación. No se está dando una transformación lineal del espacio sino una aplicación de $\mathbf{R}^3$ en si mismo. Esta aplicación de $\mathbf{R}^3$ en si mismo es biyectiva, y por tanto el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

es diferente de cero.

Consideremos ahora dos sistemas XYZ y UVW, con orígenes distintos. Supongamos que un punto P tiene coordenadas (x, y, z) en el sistema XYZ. Para hallar las coordenadas (u, u, w) en el sistema UVW, hallamos primero las coordenadas de P en un sistema $U^*V^*W^*$ que tenga el mismo origen O y que XYZ, pero con sus ejes paralelos a los de UVW, y las mismas unidades de medida que UVW. Entonces, si **i**, **j** y **k** se relacionan con $\mathbf{i}^*$, $\mathbf{j}^*$ y $\mathbf{k}^*$ por



$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= a_1\mathbf{i}^* + a_2\mathbf{j}^* + a_3\mathbf{k}^* \\ \mathbf{j} &= b_1\mathbf{i}^* + b_2\mathbf{j}^* + b_3\mathbf{k}^* \\ \mathbf{k} &= c_1\mathbf{i}^* + c_2\mathbf{j}^* + c_3\mathbf{k}^*, \end{aligned}$$

las coordenadas de P en el sistema $U^*V^*W^*$ son

$$\begin{cases} u^* = a_1x + b_1y + c_1z \\ v^* = a_2x + b_2y + c_2z \\ w^* = a_3x + b_3y + c_3z \end{cases}$$

Supongamos ahora que las coordenadas de O' en el sistema $U^*V^*W^*$ son (t_1, t_2, t_3) (si se conocen las coordenadas de O' en el sistema XYZ, usando las fórmulas anteriores podemos encontrar t_1, t_2 y t_3.

Como los sistemas $U^*V^*W^*$ y UVW son de ejes paralelos y tienen la misma unidad en ejes correspondientes, el punto de coordenadas (u^*, v^*, w^*) en el sistema $U^*V^*W^*$ tiene coordenadas (u, v, w) en el sistema UVW dadas por

$$\begin{cases} u &= u^* - t_1 \\ v &= v^* - t_2 \\ w &= w^* - t_3 \end{cases}$$

Entonces, si P tiene coordenadas (x, y, z) en el sistema XYZ, tiene coordenadas

$$\begin{cases} u &= a_1x + b_1y + c_1z - t_1 \\ u &= a_2x + b_2y + c_2z - t_2 \\ w &= a_3x + b_3y + c_3z - t_3. \end{cases}$$

en el sistema UVW. Éstas son las fórmulas para cambio de coordenadas.

Otra vez obtuvimos fórmulas que se parecen a las asociadas a una transfórmación afín del espacio, pero por las mismas razones que antes, ellas no representan una transformación del espacio sino una aplicación de $\mathbf{R}^3$ en sí mismo, que se llama transformación afín de $\mathbf{R}^3$.

PROBLEMAS

1. Hallar las fórmulas de cambio de coordenadas en cada caso. Se suponen conocidas las coordenadas $(x.y)$, y se buscan las coordenadas (u, v). El sistema XY está formado por ejes perpendiculares, y las unidades de medida en cada eje son iguales en el sentido de que la longitud de **i**, medida con un compás, es la misma que la de **j.**
   a) U definida por la recta que pasa por O en la dirección del vector de coordenadas $\mathbf{i}' = (1, -1), V$ definido por la recta que pasa por O en la dirección $\mathbf{j}' = (1, 1)$.
   b) Ahora UV es el sistema que se obtiene al trasladar el sistema del ejercicio a) por el vector $(5, 6)$.
   c) U definida por la recta que pasa por O en la dirección $\mathbf{i}' = (-1, 3), V$ definido por la recta que pasa por O en la dirección $\mathbf{j}' = (1, 0)$.
   d) Sea UV el sistema obtenido al trasladar el sistema del ejercicio c) según el vector $(-1, 5)$.
2. Llamemos UV al sistema del ejercicio 1 - b), U^*V^* al sistema del ejercicio 1 - d). Si las coordenadas en el sistema UV de un punto P son $(u, .v)$, hallar las coordenadas de P en el sistema U^*V^*.
3. Una recta en el plano tiene por ecuación $Ax + By + C = 0$ en el sistema XY del ejercicio 1.

a) Hallar la ecuación de esa recta en cada uno de los sistemas definidos en los ejercicios a) hasta d) de 1.

b) Una circunferencia C tiene por ecuación $(x-2)^2+(y-4)^2=9$ en el sistema XY. Hallar la ecuación de C en cada uno de los sistemas definidos en el ejercicio 1.

4. Para cada sistema definido en el ejercicio 1, hallar el conjunto de puntos que satisfacen

   a) $u^2+v^2=4$ *b*) $\dfrac{u^2}{4}+\dfrac{v^2}{9}=1$ *c*) $u^2-v^2=1$

   ¿Puede sacarse alguna conclusión de tipo general?

5. Se tiene un sistema de coordenadas en el plano con la propiedad de que para cada punto P del plano, y para cada $r>0$, la circunferencia de centro P y radio r (trazada con compás) tiene por ecuación $(x-p_1)^2+(y-p_2)^2=r^2$.

   ¿Qué información acerca del sistema de coordenadas puede obtenerse a partir de la propiedad dada?

6. En el espacio, se da el sistema XYZ de ejes perpendiculares entre sí, y unidad de medida igual en el sentido de que la longitud de **i** medida con compás es la misma que la de **j** y la de **k.** Hallar las fórmulas de cambio de coordenadas en cada caso, suponiendo conocidas las coordenadas (x,y,z).

   a) U definido por la recta que pasa por O en la dirección $\mathbf{i}'=\left(1,-1,-\dfrac{1}{2}\right)$, V por la recta que pasa por O en la dirección $\mathbf{j}'=(0,1,1)$ y W por la recta que pasa por O en la dirección $\mathbf{k}'=(1,1,0)$

   b) Sea UVW el sistema obtenido a partir del definido en a), por traslación según $(1,2,3)$.

   c) U definido por la recta que pasa por O en la dirección $\mathbf{i}'=(1,1,0)$, V por la recta que pasa por O en la dirección $\mathbf{j}'=(1,1,1)$ y W por la recta que pasa por O en la dirección $\mathbf{k}'=(0,1,0)$.

   d) UVW es el sistema obtenido del sistema definido en c) por traslación según $(-1,-4,-5)$.

7. Llamemos UVW el sistema del ejercicio 6- b), y $U^*V^*W^*$ al sistema del ejercicio 6 - d). Conocidas las coordenadas (u,v,w) de P en el sistema UVW, hallar las coordenadas de P en el sistema $U^*V^*W^*$.

8. Un plano en el espacio tiene por ecuación $Ax+By+Cz+D=0$ en el sistema XYZ del ejercicio 6. Hallar su ecuación en cada uno de los sistemas definidos en ese ejercicio.

9. Lo mismo que el problema 8, pero con la esfera $x^2+y^2+z^2=4$.

10. En el sistema XY del ejercicio 1, dos vectores de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son perpendiculares si y sólo si sus coordenadas satisfacen $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

    Para los sistemas a) y c) del ejercicio 1, hallar condiciones necesarias y suficientes sobre las coordenadas de dos vectores para que éstos sean perpendiculares.

11. Repetir el ejercicio 10 para el caso de vectores en el espacio y sus coordenadas en los sistemas definidos en el ejercicio 6.a) y 6.c).

12. Supongamos que las fórmulas

$$\begin{cases} u &= a_1x + b_1y \\ u &= a_2x + b_2y \end{cases}$$

    representan un cambio de coordenadas. Plantear el problema adecuadamente, y probar que la aplicación de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^2$ definida por tal cambio de coordenadas es biyectiva, y que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

13. Las fórmulas

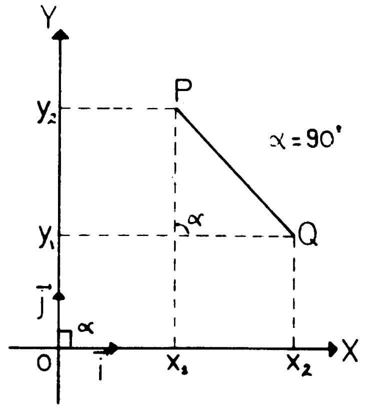
$$\begin{cases} u &= a_1x + b_1y + c_1z \\ v &= a_2x + b_2y + c_2z \\ v &= a_3x + b_3y + c_3z \end{cases}$$

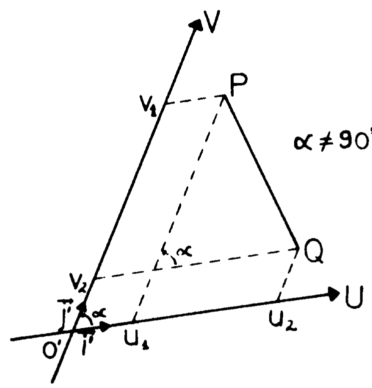
    representan un cambio de coordenadas en el espacio. Probar que en ese caso, las fórmulas definen una aplicación de $\mathbf{R}^3$ en sí mismo que es biyectiva, y que de esto se concluye que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

En un capítulo anterior vimos que se podía encontrar la distancia entre dos puntos P y Q en función de las coordenadas de P y Q. Esta fórmula se apoyaba fuertemente en dos particularidades del sistema de coordenadas: los ejes eran perpendiculares y las unidades de medida en cada eje eran iguales, de modo de usar el teorema de Pitágoras, y obtener distancia

$$(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$





En el caso de un sistema de coordenadas más general, el número

$$\sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}$$

ya no es lo que acostumbramos a llamar distancia entre dos puntos del plano. Sin embargo, el número $d(P,Q) = \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}$ satisface ciertas propiedades que tiene la distancia en el plano:

Para puntos P y Q arbitrarios

a) $d(P,Q) = d(Q,P)$

b) $d(P,Q) > 0$ y si $d(P,Q) = 0$ entonces $P = Q$

c) $d(P,Q) < d(P,R) + d(R,Q)$ (Si P, Q, R no están alineados)

La propiedad a) dice que es lo mismo medir la distancia de P a Q que medir la distancia de Q a P.

La propiedad b) significa que la distancia es un número no negativo, y si la distancia entre dos puntos es cero, entonces los dos puntos coinciden.

La tercera propiedad se llama desigualdad triangular, porque afirma que la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo siempre es mayor que la longitud del tercer lado.

Ejercicio:

Probar que para cualquier sistema de coordenadas UV en el plano,

$$d(P,Q) = \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}$$

(donde $P = u_1\mathbf{i}' + v_1\mathbf{j}'$, $Q = u_2\mathbf{i}' + v_2\mathbf{j}'$ satisface las propiedades a), b) y c).

AUTOEVALUACIÓN

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA-1511—Autoevaluación de los capítulos 16 al 20—

Sus respuestas las puede verificar en el Apéndice, en la página 344.

1. Halle la imagen de la elipse $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ bajo la transformación lineal T definida por:

$$T(\vec{i})=\vec{i}\ ,\ T(\vec{j})=\vec{i}+3\vec{j}$$

- A | $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$
- B | $\dfrac{(3x-y)^2}{36}+\dfrac{y^2}{81}=1$
- C | $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$
- D | $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$
- E | $\dfrac{(3x+y)^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$
- F | ¡Ninguna!

2. Halle la proposición falsa acerca de las transformaciones lineales T del plano (biyectivas).

- A | T transforma el origen en si mismo
- B | T transforma las rectas en rectas
- C | T puede transformar el origen en el punto $(1,4)$
- D | T puede transformar un círculo en una elipse
- E | T puede transformar una hipérbola en otra hipérbola
- F | ¡Ninguna!

3. Halle la ecuación de la imagen de una circunferencia de centro $C(-2,2)$ y radio 3, según una rotación de centro el origen $O(0,0)$ y el ángulo $60°$ (antihorario).

- A | $x^2+y^2=3$
- B | $(x+1+\sqrt{3})^2+(y-1+\sqrt{3})^2=9$
- C | $(x+2)^2+(y-2)^2=9$
- D | $(x+1-\sqrt{3})^2+(y-1-\sqrt{3})^2=9$
- E | $(x-1+\sqrt{3})^2+(y+1+\sqrt{3})^2=9$
- F | ¡Ninguna!

4. Halle el sistema de ecuaciones de la imagen de la recta

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y+3z-5 &=& 0 \\ x-2y-z+5 &=& 0 \end{array}\right.$$

según una homotecia de centro el origen $O(0,0)$ y razón $k=4$.

A $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y+3z-5 &=& 4 \\ x-2y-z+5 &=& 4 \end{array}\right.$

B $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y+3z-4 &=& 0 \\ x-2y-z+4 &=& 0 \end{array}\right.$

C $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y+3z-20 &=& 0 \\ x-2y-z+20 &=& 0 \end{array}\right.$

D $\left\{\begin{array}{rcl} 12x-8y+12z-5 &=& 0 \\ 4x-8y-4z+5 &=& 0 \end{array}\right.$

E $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y+3z-1 &=& 0 \\ x-2y-z+9 &=& 0 \end{array}\right.$

F ¡Ninguna!

5. Halle las fórmulas de transformación de coordenadas para la simetría del espacio respecto al plano $x+y+z=0$.

A $\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& \frac{1}{5}x-\frac{2}{5}y-\frac{2}{5}z \\ y' &=& -\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y-\frac{2}{5}z \\ z' &=& -\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}y+\frac{1}{5}z \end{array}\right.$

B $\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& \frac{1}{5}x+\frac{2}{5}y+\frac{2}{5}z \\ y' &=& \frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y+\frac{2}{5}z \\ z' &=& \frac{1}{5}x+\frac{2}{5}y+\frac{1}{5}z \end{array}\right.$

C $\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& x+2y+2z \\ y' &=& 2x+y+2z \\ z' &=& x+2y+z \end{array}\right.$

D $\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& x-2y-2z \\ y' &=& -2x+y-2z \\ z' &=& -x-2y+z \end{array}\right.$

E $\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& \frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z \\ y' &=& -\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z \\ z' &=& -\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z \end{array}\right.$

F ¡Ninguna!

6. Halle la imagen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ bajo la transformación lineal T dada por

$$\begin{array}{rcl} T(\vec{i}) & = & \vec{i} + \vec{j} \\ T(\vec{j}) & = & \vec{j} + \vec{k} \\ T(\vec{k}) & = & \vec{i} \end{array}$$

A | $(y-z)^2 + y^2 + (x+y-z)^2 = 1$

B | $(y-z)^2 + z^2 + (x+y+z)^2 = 1$

C | $y^2 + z^2 + (x+y+z)^2 = 1$

D | $(y-z)^2 + z^2 + (x-y+z)^2 = 1$

E | $(y+z)^2 + z^2 + (x+z)^2 = 1$

F | ¡Ninguna!

7. Halle las fórmulas de transformación de coordenadas de la transfomación afín en el plano dada por el producto GT de la transformación lineal T definida por

$$T(\vec{i}) = \vec{i}\,, T(\vec{i}) = \vec{i} + \vec{j}$$

y la traslación G según $V = (1, -2)$.

A | $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x+y+2 \\ y' & = & -x-y+1 \end{array}\right.$

B | $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x-y+2 \\ y' & = & -y+1 \end{array}\right.$

C | $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x+y-2 \\ y' & = & -x-y+1 \end{array}\right.$

D | $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x-y+1 \\ y' & = & -x-2 \end{array}\right.$

E | $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x+y+1 \\ y' & = & y-2 \end{array}\right.$

F | ¡Ninguna!

8. Halle una transformación afín del plano que mande la recta $x = 0$ en la recta $-x + 2y = 4$.

A | $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -x-2y-4 \\ y' & = & y+1 \end{array}\right.$

B | $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -x+2y-4 \\ y' & = & y-2 \end{array}\right.$

C | $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -x+2y-4 \\ y' & = & x+y-1 \end{array}\right.$

D | $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x+2y-4 \\ y' & = & -y \end{array}\right.$

E | $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x+2y-4 \\ y' & = & y \end{array}\right.$

F | ¡Ninguna!

9. Considere el sistema UV de coordenadas en el plano cartesiano definido por:

- la recta U que pasa por el origen en la dirección del vector $\vec{i'} = (1, -1)$.
- la recta V que pasa por el origen en la dirección del vector $\vec{j'} = (1, 1)$.

Halle el conjunto de puntos del plano cartesiano XY que satisfacen $u^2 - v^2 = 1$.

A $xy = -1$ | B $x + y = 1$ | C $x + y = 4$ | D $xy = -4$ | E $x^2 - y^2 = 1$ | F ¡Ninguna!

10. En el sistema de coordenadas cartesianas XY dos vectores de coordenadas $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ son perpendiculares si y sólo si sus coordenadas satisfacen $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Considere el sistema UV de coordenadas en el plano cartesiano definido por:

- la recta U que pasa por el origen en la dirección del vector $\vec{i'} = (1, -2)$.
- la recta V que pasa por el origen en la dirección del vector $\vec{j'} = (1, 2)$.

Halle la condición necesaria y suficiente sobre las coordenadas de dos puntos $(u_1; v_1)$ y $(u_2; v_2)$ en el sistema UV para que esos vectores sean perpendiculares.

A $u_1u_2 + v_1v_2 = 0$

B $5u_1u_2 - 3u_2v_1 - 3u_1v_2 + 5v_1v_2 = 0$

C $5u_1u_2 - 3u_2v_1 - 3u_1v_2 + 5v_1v_2 = 5$

D $3u_1u_2 - 5u_2v_1 - 5u_1v_2 + 3v_1v_2 = 0$

E $u_1u_2 + v_1v_2 = 5$

F ¡Ninguna!

SOLUCIONES DE LAS AUTOEVALUACIONES

AUTOEVALUACIÓN

Respuestas para:

Modelo de Autoevaluación

1. C
2. F
3. A
4. D
5. A
6. C
7. D
8. A
9. C
10. B

AUTOEVALUACIÓN

Respuestas para:

Autoevaluación de los capítulos 1 al 5

1. C
2. D
3. C
4. E
5. D
6. A
7. E
8. E
9. A
10. A

AUTOEVALUACIÓN

Respuestas para:

Autoevaluación de los capítulos 6 al 10

1. D
2. B
3. A
4. D
5. E
6. E
7. A
8. D
9. F
10. E

AUTOEVALUACIÓN

Respuestas para:

Autoevaluación de los capítulos 11 al 15

1. E
2. D
3. A
4. B
5. C
6. D
7. D
8. F
9. D
10. B

AUTOEVALUACIÓN

Respuestas para:

Autoevaluación de los capítulos 16 al 20

1. B
2. C
3. B

4. C
5. E
6. D
7. E
8. E
9. A
10. B